This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5859.02.5

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.

CHRISTO ET ECCLESIAE

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

19873

REGIA LITT. UNIVERSITAS HUNG.
CLAUDIOPOLITANA

IOANNIS BOLYAI

IN MEMORIAM

Kolozsvár, Hungary — Királyi tudomány-egyetem
Cluj, Rumania - Univ.

LIBELLUS

POST SÆCULUM QUAM

IOANNES BOLYAI DE BOLYA

ANNO MDCCCII A. D. XVIII KALENDAS IANUARIAS

CLAUDIOPOLI NATUS EST

AD CELEBRANDAM MEMORIAM

EIUS IMMORTALEM

EX CONSILIO

ORDINIS MATHEMATICORUM ET NATURÆ SCRUTATORUM

REGIÆ LITTERARUM UNIVERSITATIS HUNGARICÆ

FRANCISCO-JOSEPHINÆ CLAUDIOPOLITANÆ

EDITUS

CLAUDIOPOLI

MCMII

Math ~~5039.02.7~~
5859.02.5

Bowditch fund.

TYPIS SOCIETATIS FRANKLINIANÆ BUDAPESTINENSIS.

N. B. Jó nekiek levelekat írok, de közel vagyunk [illegible] instálom köttessen meg nekiek levelével mindég úgy a' mint [illegible] tsak lehet, mert ha akármilyen

Kedves Édes Apám.

Annyi temérdek tennivalóm[meg] van az ujj [illegible] most nem tudok másként segítni magamon [illegible] kadet[illegible]belé, 's tsak egy Quartérnal írok; vá[rom] levelemre várom, 's Atalám már nem ír[hat] a' Báronénak írt levelet nem akartam [illegible] jé alá tenni, melyek által-adására [illegible] Leg-elébb válaszolok a' Binomiumra. Qu[illegible] tökélletes úgy a' mint meg-írta, hanem [illegible] formájjót, hogy azzal a' rémivel lehessen él[ni] [illegible] a' Coëff[icient]ek törvénnye ismeretlen, mint [illegible] niustól, úgy nem lehet applicálni az a' [illegible] tentziára ab inductione előre ki [illegible] sátába való tapogatás volna, mert a' g[illegible] ismerne, honnét mehetnék rá, hogy a^{3+3} jön $= a^3 + 3a^{3-1}.b + \frac{3.2}{1.2}a^{3-2}.b^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}a^{3-3}b^3$ nak az a' Nomenyja; hogy nagyon [illegible] írók ugyan mind demonstrálják la bino[mium] rigorose véve tsak pro integr. posit. [illegible] fog, hogy generaliter demonstrálja cum [illegible] kenöje, ott az övé se ér semmit pro i[illegible] tozlatva szép. Én azt gondolom, hogy [illegible] tetebb és [szeptelegpőgadtalt]* [illegible] az, mely a' [illegible] mivel az a' közönséges multiplicatio [illegible] diata. A' Combinatióknak és Permuta[tióknak] [illegible] inak hosszan 's zavaroson) én h[illegible] ba fogott papirosra, (már régen) olyan evidens [illegible] ját írtam le, hogy bátran mondhatom [illegible] mesterkedik, 's még is szörnyű rosz, zav[aros] [illegible]

* mellyet ugyan nem is említenék, ha [illegible] Apámnak Úgy nézem, mintha az [illegible] az tsak annak a' [illegible]

Már! hosszan [illegible] denkkel [illegible] ∞ exponens [illegible] 0 ki-fejti az ember y ha tovább üzné a' Coëff[icient]ek 's ma[illegible] a' Binomiumnak a' [illegible] gyanitja az [illegible] hogy ha igaz [illegible] meg pedig igen [illegible] leves bizonyos, ha [illegible] ha mindenik le[illegible]

$= 2q = 3q, \ldots =$

negatív, a' mint

$\left(1 + qx + \frac{q(q-1)}{1.2}.x\right.$

tettük, hogy q [illegible]

positív, valam[int]

$+ \frac{m.n}{m}\left(\frac{m.n}{m} - 1\right.$
1.2

positív, tovább

Meg-jegyzendő [illegible] series, mivel [illegible] Coëffjei mind [illegible] stratio menete [illegible] mintha $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ [illegible] series-hez. [illegible] exponensekre is [illegible] A' feltételem [illegible] rallélákról [illegible]

[illegible] igérte a' parallelákról, ha [illegible]
dolgokat hoztam ki, hogy magam elbá[multam]
[illegible] ha meglátja Édes Apám, meg-ismeri
[illegible] hogy semmiből egy ujj más világot te[remtettem]
[illegible] tsak kártyaház a' toronyhoz képest
[illegible] bővebben tudósítani fogom [illegible]
vagyok örökös hálá[illegible] [illegible] tisztelő fia Bolyai

~~50~~ 58 …ől sorást egymással multiplicaltatik, mindenik tag mer bizonyos, hogy egy törvény jö ki az x potentiaikat, mely…tól mind eggyel menek in ∞. Ha a' 3 első tagot -, meg-lesszük, hogy $(1+qx+\dots)(1+px+\dots)=1+(p+q)x+\frac{(p+q)(p+q-1)}{1\cdot2}x^2+$; az ember a' calculust, mind ezen törvény szerint mennének is itt van egy nyájas az Édes Apámtól adott nemé maga hellyén, mivel már látszik a' törvény, 's egyszerű -ebben, hogy az mind úgy fog menni. Demonstrálja tehát -a a' törvény az n^{dik} tagról, igaz az $(n+1)$dikről is szép, elmés formába 's simplicitásra. Már tehát annyi tökél

$$(1+qx+\frac{q(q-1)}{1\cdot2}x^2+\dots)(1+px+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}x^2+\dots)=1+(p+q)x+\frac{(p+q)(p+q-1)}{1\cdot2}x^2+$$

ries az ∞ba fut. Legyen már p előbb $=q$, azután rendre mq, (az hol m egész positív szám, mert nem lehet hirtelen véltségből írva Édes Apám); ki fog jöni

$$+\dots)^m=1+mqx+\frac{mq(mq-1)}{1\cdot2}x^2+\dots$$

Már mivel fel ikármi lehessen, legyen $q=\frac{n}{m}$, a' hol n is egész mint m volt; lesz

$$\left(1+\frac{n}{m}x+\frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)}{1\cdot2}x^2+\dots\right)^m=1+\frac{mn}{m}x$$

$$)x^2+\dots=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\dots$$

's mivel n egész …ba $=(1+x)^n$; 's tehát

$$(1+x)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}x+\frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)}{1\cdot2}x^2+$$

(Q.E.D.

hogy $(1+\frac{n}{m}x+\dots)$nek az m^{dik} potentiája egy végez $(1+nx+\dots)$ meg-szakad; a' következendő tagok $=0$. Egy kis ség különösnek találom, hogy a' demon…ból (mely mihez tökélletesen foly), úgy tetszhetnék tökélletesen = volna az infinitásra felé menő …ról a' materiára meg értekeződünk; negativ ex… majd meg-próbáljuk ki. Már egyebet a' mennyi … ár áll hogy mihelyt rendbe szedem, el-készítem, 's mód lesz, a' pa…inkat adok ki; ebbe a' pillantatba nints kitalálva, de az az is,

LECTORI SALUTEM.

Mathematicorum et naturæ scrutatorum huius universitatis ordo in sessione anno MDCCCIC a. d. XIV. Kalendas Ianuarias habita ad sollemnia centenaria diei illius celebranda, quo die

IOANNES BOLYAI

natus est, natalem eius domum tabula ornandam et libellum edendum decrevit, quo, quantum geometria absoluta, a IOANNE BOLYAI condita, ad disciplinas mathematicas sæculo undevicesimo promovendas valuerit, demonstretur.

Quem librum sempiterna lingua Latina conscriptum et societatibus doctis litterarumque universitatibus et artis mathematicæ cultoribus totius orbis offerentes, facere non possumus, quin gratias quam maximas agamus cum Summo Ministerio per Regnum Hungaricum rebus sacris atque institutionibus publicis præfecto, quod liberalissime pecuniæ præsidia ad libellum edendum necessaria præbuerit, tum Academiæ litterarum Hungaricæ, cuius voluntate benifica fieri potuit, ut simulacrum epistolæ a IOANNE BOLYAI ad patrem datæ, quæ maximi ad geometriæ absolutæ historiam momenti est, in initio libelli poneremus, tum vero viris clarissimis, qui huic libello conscribendo operam non denegaverunt.

Proinde hic libellus, qui testimonio sit patriam summi, quem tulit, viri memoriam colere et observare, prodeat et pro sua parte efficiat, ut disciplinæ a IOANNE BOLYAI conditæ studium crescat et augeatur.

Dabamus anno MCMII a. d. XVIII Kalendas Ianuarias, Claudiopoli in Hungaria, ex decreto Ordinis mathematicorum et naturæ scrutatorum Regiæ litterarum Universitatis Hungaricæ Francisco-Iosephinæ Claudiopolitanæ:

LUDOVICUS SCHLESINGER,
huius libri redactor.

IULIUS FARKAS,
h. t. decanus.

CONTENTA.

NOTANDUM.

Dissertationes II, III præterea operum indicis introductionem Rudolphus Fuchs, philosophiæ candidatus, epistolam Ioannis Bolyai autem Gabriel Finály de Kend, philosophiæ doctor, in sermonem Latinum vertit. Dissertationum versio ab auctoribus diligenter examinata est, qua in re Finály, vir doctissimus, correcturæ plagulis legendis operam non denegavit.

EPISTOLA CUIUS SIMULACRUM HUIC LIBRO PRÆFIXUM EST

A

IOANNE BOLYAI

AD WOLFGANGUM BOLYAI PATREM DATA

IN LATINUM CONVERSA.

50; 38-1, Temesvarini, 3tia Nov. 1823.

Carissime Pater!

Tam multa eaque gravia ad te de novis meis inventis scribenda habeo, ut nunc nequaquam alio modo mihi consulere possim, nisi nullis alliis rebus indulgens quartam solam plagulam perscribam. Exspecto responsum tuum, quod ad meas litteras duarum plagularum mihi debes. Forsitan nihil scripseram antequam tuas litteras accepissem, nisi litteras ad coniugem Baronis datas atque in involucrum ad te missum inclusas mittere voluissem, quas ut tradas, humillime te rogo, Carissime Pater.

Omnium primum respondebo tibi de Binomio. Demonstratio quoad exponentes integros positivos, ita ut conscripsisti, perfecta est, scilicet si forma seriei a priori nota est, ut eo genere demonstrationis uti possimus; at si lex coëfficientium nequaquam nota est, ut fuit ei, qui primam inquisitionem formulæ fecit, hic modus applicari non potest, nonnisi formulæ ad secundam et tertiam potestatem ab inductione præformentur; at hoc idem est ac in caligine volutari, serie enim generali plane ignota unde deducatur fore, ut formula

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

formulæ

$$a^3 + 3a^{3-1}b + \frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,a^{3\ \ 2}b^2 + \frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{3-3}\,b^3$$

subscribatur? Demonstratio autem tua, Carissime Pater, habet propriam laudem, quia brevissima est. Lacroix queritur a scriptoribus

*

quidem omnibus demonstratum esse theorema binomiale, sed demonstrationem rigorose tantum pro [exponente] integro positivo valere, itaque ipse generaliter cum rigore demonstrare cœpit, sed ubi difficultates incipiunt, etiam eius demonstratio hæretscit, quamquam pro integro positivo nimirum valet et rite mutata etiam pulchra est. Ego autem credo pro integro positivo naturæ maxime conveniens, quinimo directissimum ac prope brevissimum iter esse, quod ex theoria combinationum sequitur, quia immediate fluit ex regula multiplicationis nota. Theoriam combinationum et permutationum, (de qua tantum longe et confuse scriptum est) iam dudum tam evidentem, facilem directamque in viginti plagulis octava forma conscripsi, ut facile dixerim: non plus ultra. VEGA etiam multum operæ dedit huic theoriæ, quæ apud eum nimia arte ac studio efficta, tamen pessima confusaque est; in fine partis primæ parvum additamentum etiam legitur.

Iam transeo ad partem alteram demonstrationis, quæ vere pulcherrima, evidentissima et quoad rei naturam brevissima etiam est, sed ut scripsisti, Carissime Pater, abest complementum, quod in casu seriei decrescentis essentialiter necessarium est. Demonstratio breviter hæc est: Quodvis sit q et p, concipere possum has duas series

$$1 + qx + \frac{q(q-1)}{1.2} x^2 + \cdots \text{ in infinitum}$$

et

$$1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2} x^2 + \cdots \text{ in infinitum;}$$

et si has series ita concipio, de complemento nimirum nulla quæstio fieri potest, utrasque enim series concipere possum extensas in infinitum, ut exempli gratia

$$a + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \cdots$$

Itaque si duæ series altera per alteram multiplicantur, nempe singuli termini per singulos in infinitum, certum est seriem secundum ipsius x potestates progredientem fieri, quarum exponentes a 0 incipientes semper unitate crescent in infinitum. Si ternos primos terminos exsequaris, evidenter fiat

$$(1+qx+\cdots)(1+px+\cdots)=1+(p+q)x+\frac{(p+q)(p+q-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

et si ulterius calculum evolveris, eadem regula coëfficientium erit. Nunc quidem hic recte potest applicari, Carissime Pater, demonstratio a te data, quia iam regula manifesta est iam iamque apparet fore, ut eadem regula semper valeat. Demonstras itaque regulam, si vera est de coëfficiente n^{to}, veram esse de $n+1^{\text{to}}$, et quidem pulcherrima ingeniosissimaque forma atque aperto simplicique modo.

Ergo iam certum verumque est

$$\left[1+qx+\frac{q(q-1)}{1.2}x^2+\cdots\right]\left[1+px+\frac{p(p-1)}{1.2}x^2+\cdots\right]$$
$$=1+(p+q)x+\frac{(p+q)(p+q-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

esse, si utraque series in infinitum excurrit. Ponatur nunc p prius $=q$, deinde ordine $=2q$, $=3q$, ..., $=mq$ (ubi m integer positivus est, nam nequaquam est negativus, quemadmodum tu, Carissime Pater, festinans scripsisti); tunc erit

$$\left(1+qx+\frac{q(q-1)}{1.2}x^2+\cdots\right)^m=1+mqx+\frac{mq(mq-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

Sed quia propositum est ipsum q cuiusvis valoris esse posse, sit $q=\frac{n}{m}$ ubi et n integer positivus erit, ut m erat; erit

$$\left(1+\frac{n}{m}x+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots\right)^m=1+\frac{m.n}{m}x+\frac{\frac{m.n}{m}\left(\frac{m.n}{m}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots,$$
$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots,$$

et quia n integer positivus est, porro $=(1+x)^n$, itaque

$$(1+x)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}x+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots,$$

quod erat demonstrandum.

Notandum est potestatem m-tam seriei

$$1+\frac{n}{m}x+\cdots$$

seriem finitam esse, quia

$$1+nx+\cdots$$

interrumpitur; coëfficientes terminorum subsequentium omnes $=0$ sunt. Miror tamen, quod procedente demonstratione (quæ perfectissime fluit) cogitare potes quasi $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ ipsum absolute $=$ esset seriei decrescenti prius descriptæ. Sed de hac re alias; experiemur quoad exponentes etiam negativas. Nunc de aliis, quantum spatii mihi in charta datur.

Statutum ac deliberatum habeo de parallelis, simulac, quæ inveni, in ordinem digesserim, perfecerim atque ut primum potuerim, opusculum me editurum esse. Hoc ipso momento temporis res nondum excogitata est, sed via, quam ingressus sum, propositum mihi finem, si finis ille alioquin attingi potest, pro certo fere promisit. Elaboratum quidem nondum est, sed tam mira deduxi, ut ipse etiam admiratione stupeam, irreparabileque damnum esset, si ignota manerent. Si legeris, Carissime Pater, probata tibi erunt. Nunc amplius nihil, nisi me ex nihilo novum et alium mundum creavisse, omniaque, quæ

adhuc miseram, casam esse pro turri. Persuasum mihi habeo hoc non minori laudi mihi fore, quam si iam perfecerim. Responsum tuum æterna erga te pietatis pleno animo exspectabit filius tuus

BOLYAI m. p.

P. S. Ponderosas litteras scribebam, sed haud procul absumus, ita taxa nimis magna non est. Fac ut solvendum mihi sit semper pro ponderosissimis tuis litteris, quæ sint vel ponderosissimæ, maximo gaudio solvam eas.

P. S. Ingenii mei nata, Carissime Pater, coram te ita sum ausus diiudicare, uti mihi de iis persuasum habeam; nullam enim interpretationem perperam factam timeo, uti immeritam; fiducia hæc nihil aliud est, nisi ut patrem meum certis in rebus tamquam aliquod exemplar mei intuear.

DE NONNULLIS ABSOLUTÆ GEOMETRIÆ AD THEORIAM COMPLEXÆ VARIABILIS FUNCTIONUM APPLICATIONIBUS.

AUCTORE

LUDOVICO SCHLESINGER

PHILOSOPHIÆ DOCTORE, MATHESIS SUBLIMIORIS IN UNIVERSITATE FRANCISCO-IOSEPHINA CLAUDIOPOLITANA PROFESSORE PUBLICO ORDINARIO, ACADEMIÆ LITTERARUM HUNGARICÆ SOCIO EPISTOLARI.

INTRODUCTIO.

Si independens variabilis

$$\eta = p + q\sqrt{-1}$$

uniformis functionis periodicæ $x = f(\eta)$ plani Euclidei Σ punctis, ut usus repræsentatur, variabili η periodo ω aucto plani translatio parallela in se ipsum respondet. Functionis $f(\eta)$ periodicitas igitur geometrice ita describi potest, ut hanc functionem in translationibus quibusdam parallelis plani Euclidei non mutari dicamus.

Constat generalissimam plani Euclidei translationem formula

$$\zeta = e^{\vartheta\sqrt{-1}}(\eta + \omega)$$

exprimi, in qua æquatione ϑ angulum realem, ω autem quantitatem quamlibet designat, quæ ex translatione parallela $\eta + \omega$ et ex rotatione, quæ fit donec angulus ϑ formetur, componi potest. Quo facto uniformes functiones, quæ in plani Σ translationibus quibusdam ex translationibus parallelis et rotationibus compositis non mutentur, efficere minime difficile erit. Quæ functiones non solum functionibus biperiodicis adhibitis exstruuntur, sed etiam dici potest, uniformium complexæ variabilis functionum, quæ tales sunt, ut in plani Euclidei translationibus quibusdam non mutentur, classem biperiodicarum functionum classe in summa exhauriri.

In uniformibus complexæ variabilis eis functionibus quærendis, quæ antieuclidei plani translationibus eiusdem momenti atque

biperiodicæ plani EUCLIDEI translationibus sunt, ad functionum classem deducimur, quæ, quatenus unius variabilis functiones extenduntur, naturalis biperiodicarum functionum classis generalisatio consideranda est.

Complexarum quantitatum analysim et geometriam absolutam, præcipue geometriam plani absoluti, hypersphærarum, sphærarum, parasphærarum inter se cohærentes esse,

IOANNES BOLYAI

vir illustrissimus, qui geometriæ absolutæ autor est, iam perspexit,* cuius geometræ memoriam hoc libello celebraturi sumus. Eæ relationes autem, quæ sunt inter complexas quantitates et geometriam absolutam, quæque ad theoriam functionum classis, quam supra commemoravimus, spectant, exploratorum fructibus, in quorum numero præcipue BELTRAMI et POINCARÉ, viri illustrissimi, putandi sunt, continentur. De quorum enim virorum sententia BOLYAIani plani puncta uniformiter complexorum valorum universitati assignari possunt eorum, ad quos

$$1 + c(p^2 + q^2) \geqq 0$$

est, ubi c cum positiva quantitate a BOLYAI in «Appendice» i designata, quæ quantitas illius plani BOLYAIani vim definit, æquatione $ci^2 = -1$ coniungitur. Qua re complexi valores

$$\eta = p + q\sqrt{-1},$$

ad quos

$$1 + c(p^2 + q^2) = 0$$

est, plani BOLYAIani punctis in infinitum remotis respondebunt, cuius

* Ad hæc conferas §§. 9—11. Responsionis, quam STÆCKEL, vir clarissimus, ex iis, quæ I. BOLYAI reliquit, edidit (Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, t. XVI, pag. 288. squ.) et eas notas, quas idem STÆCKEL edidit (eodem loco t. XVIII, pag. 256. squ.).

plani translationes in se ipsum proiectivis substitutionibus

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \tag{1}$$

unitatis determinantem habentibus exprimuntur, quæ expressionem

$$1 + c(p^2 + q^2)$$

positivo factore excepto in se ipsam transformant.

Uniformes functiones ipsius η, quæ in plani BOLYAIani translationibus quibusdam non mutantur, tum variabilis η eis valoribus solis, qui inæquationi

$$1 + c(p^2 + q^2) > 0$$

satisfaciunt, definitæ eosdem valores assumunt substitutionibus quibusdam, quæ formam (1) habent, ad η applicatis.

Harum functionum casum specialem (quæ dicitur functio modularis) functionum biperiodicarum theoria ipsa offert; generalis theoriæ auctor est ill. POINCARÉ, qui has functiones FUCHSianas appellavit, quæ theoria ab eo ceterisque æqualibus mathematicis magis elaborata est. Cur functiones FUCHSianæ adeo insignes factæ sint, causa est eius rei, quod cum analyticarum proprietatum copia iucundæ sunt, tum quod ad multiformes relationes quasdam inter duas complexas variabiles uniformandas applicari possunt. Quo modo enim uniformes loci functiones in superficie RIEMANNiana, si simpliciter connexa est, rationales, si tripliciter connexa, uniformes et biperiodicæ variabilis auxiliariæ functiones repræsentantur, eodem modo si superficies RIEMANNiana $2p+1$-pliciter connexa est, ubi $p > 1$ est, loci functiones in hac superficie uniformes FUCHSianæ variabilis auxiliariæ functiones repræsentari possunt.

Eadem repræsentatione efficitur, ut in geometricam talium $2p+1$-

pliciter connexarum superficierum constitutionem inspicere possimus, præcipue autem, quam sint invariantes et in deformatione continua et in repræsentatione conformi proprietates, magnopere patet.

Quantopere valores omnes, quos independens functionis FUCHSianæ variabilis assumat, plani BOLYAIani punctis repræsentari referat ad theoriam harum functionum inde cognoscitur, quod ea re non solum analogias functionum, quæ in plani EUCLIDEI translationibus non mutantur, persequi possumus, sed etiam eæ notiones ipsæ, quæ functionibus FUCHSianis solis propriæ sunt, producuntur. Aitque ill. POINCARÉ * «Cette terminologie (sc. l. absolutæ geometriæ) m'a rendu de grands services dans mes recherches».

Functiones FUCHSianæ cuiusmodi hoc loco commemoratæ sunt, (ex illius POINCARÉ designatione: primæ, secundæ, sextæ familiæ) in duas partes generalisari possunt. Primo ea condicio, qua functiones non sunt, nisi variabilis eos valores assumat, qui realibus plani BOLYAIani punctis repræsentantur, negligi, deinde determinatio, qua substitutionibus proiectivis plani BOLYAIani translationes in se ipsum repræsententur, tolli potest.

Etiam theoriæ earum functionum, quæ determinatione sublata exsistunt, quasque ill. POINCARÉ KLEINianas designavit, absoluta geometria utilis fieri potest, cum ** proiectivæ variabilis complexæ substitutiones quævis translationum loco spatii BOLYAIani, cui tres dimensiones sunt, haberi possint.

Conabimur in sequentibus absolutæ geometriæ ad functionum theoriam applicationes, quas hoc loco paucis indicavimus, adumbrare, ut a problematibus geometricis profecti magis syntheticam constructio-

* Acta Mathematica, t. I. pag. 8.

** Confer e. g. POINCARÉ, Acta Mathematica, t. III.

nem theoriæ functionum FUCHSianarum (primæ, secundæ, sextæ familiæ) et cognatarum functionum quarundam paucis delineemus. Commemoratarum generalium functionum, quæ substitutiones proiectivas patiuntur, theoria velim plane neglegatur, quoniam hoc opus eo consilio, quod persequatur, limitatum est.

I.

DE ANALYSIS SITUS CONSIDERATIONIBUS.

RIEMANN, viro illustrissimo, debetur, quod perspeximus in analyticis relationibus quibusdam geometrice illustrandis non solum qualitates geometricarum figurarum metricas magni momenti esse, sed etiam eas, in quibus de portionibus et regionibus solum agitur* ut non ad quantitatem atque ad extensionis mensuram, sed ad ordines et situs modum, ut ill. LISTING** dicit, pertineant. Harum qualitatum doctrina, quæ sunt geometricis figuris, termino, cuius autor LEIBNITZ***, vir illustrissimus, est, Analysis Situs nominatur. Superficierum qualitatibus autem, quæ analysis situs sunt, idem Ioannes BOLYAI operam dedit. In amplo manuscripto, quod extremis ætatis annis confecit, quodque Raumlehre inscribitur, nonnullæ notationes inveniuntur, quas STÆCKEL, vir clarissimus, qui hoc manuscriptum inter relicta manuscripta invenit, mecum benigne communicavit.

«Simplex linea est cursus puncti, quod locum relictum non iam

* RIEMANN, Opera Mathematica (Lipsiæ, 1890) pag. 91.

** Census räumlicher Complexe (Gottingæ, 1862) pag. 13.

*** LISTING in numero secundo Præstudiorum Topologiæ (Göttinger Studien, 1847, I. pars) sic citat: «je croy, qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géometrique . . . qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem.»

intrat, sed ad id punctum, unde egressum est, redit.» Similiter simplicem superficiem definienti difficultates offeruntur. «Ex superficie qualibet focorum numerus quivis pungi potest, ibique adactæ canales binæ congeri possunt. Talis est generalissime simplex superficies.» Ad hæc in margine nota adiecta est: «Argumentum perquiratur», cum alia notatio præscribat: «Diversa simplicium superficierum genera enumerentur». Distinctio inter diversa simplicium superficierum genera a BOLYAI indicata varietatum duarum dimensionum ex analysi situs distributionis naturam re vera attingit.

Si enim ponimus, superficiei partem quandam F_r planam, quæ r lineis continuis finita sit, $2p$ focis affectum esse, qui bini canalibus sine nexu coniuncti sint, item superficiem r lineis finitam $F_{r,p}$ obtinemus, cui cohærentiam $2p+r$ esse RIEMANN* sensit. Si non a superficiei parte F_r r lineis finita, sed a superficie in se ipsam redeunte e. g. a sphæra proficiscimur, fieri non potest, quin hanc, ut RIEMANN et LISTING, viri illustrissimi, puncto sublato in superficiem una linea finitam esse mutatam cogitemus, ut igitur pro superficie in se ipsam redeunte F_0 numquam superficies F_1 una linea finita non statuenda sit. Hæc superficies, quæ ex altera in se ipsam redeunte, $2p$ focis punctis, qui bini canalibus coniuncti sunt, provenit, nihil abhorret ab ea superficie, qua F. KLEIN, vir clarissimus,** superficie normali generis p primus usus est. Generaliter superficiem $F_{r,p}$ superficiem normalem BOLYAIanam r lineis finitam et $2p+r$-pliciter connexam designemus. Atque BOLYAI dicit (vide supra): «Hanc normalem superficiem generalissime simplicem esse», id quod sic intelligendum est.

Sit M_2 generaliter duarum dimensionum varietas, quæ cum in

* Opera Mathematica, pag. 92 squ.

** Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale (Lipsiæ, 1882) pag. 26; cf. CLIFFORD, Proceedings Societatis Mathem. Londin. t. VIII (1877).

spatio EUCLIDEO dimensionum numerum quemvis habente contineatur, his æquationibus

$$(1) \qquad x_k = \Theta_k(u, v) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

exprimi potest, ubi Θ_k sunt analyticæ duarum realium variabilium u, v functiones et $x_1, \ldots, x_n$ sunt illius EUCLIDEI spatii eæ coordinatæ, quibus elementi linearis ds quadratum hac forma

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

exprimitur. Tum varietatis M_2 elementi linearis quadratum forma definita positiva

$$(2) \qquad Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

differentialium du, dv datur.

Ad plane definiendam varietatem M_2, præter æquationes (1) inæquationibus quibusdam ut opus sit fieri potest. Insuper ut breviter loquamur, semper supponimus, varietatem perquirendam esse bilateralem, ut ill. POINCARÉ* sensit.

Si autem nobis sunt duæ secundæ dimensionis varietates eæ, quarum omnia puncta, alia ad alia, ad se ita referantur, ut singulis curvis alterius singulæ alterius correspondeant, utque curvæ correspondentes pariter et continuæ et finitæ et infinitæ sint, varietatem utramque homœomorpham esse sicut ill. POINCARÉ** dicimus. Homœomorphæ varietates ex analysi situs æquivalentes considerari possunt.

Ex theoremate, cuius autor JORDAN, vir clarissimus, est,*** necessaria et sufficiens condicio, qua duæ varietates M, M' homœomorphæ sint, posita est in ea re,

* Analysis Situs, Journal de l'Ecole Polytechnique, series II, fasc. I, 1895. pag. 27.

** l. c. pag. 9.

*** Journal de Mathématiques (Liouville), ser. II. tom. XI, cf. DYCK, Mathem. Annal. t. XXXII. pag. 485, POINCARÉ, l. c. pag. 70.

1. quod linearum finientium numerus idem est, quodque curvæ finientes, aliæ aliis e continuitatis lege correspondeant;

2. quod eis eadem cohærentia est.

Quo fit, ut omnis bilateralis m-pliciter connexa varietas r lineas finientes habens, superficiei $F_{r,\frac{m-r}{2}}$ Bolyaianæ normali (differentia $m-r$ est semper par numerus) homœomorpha est, ita, ut igitur superficies normalis Bolyaiana varietatis generalissimæ m-pliciter connexæ r lineas finientes habentis repræsentatrix ex analysi situs re vera considerari possit. Cum supponatur M_2 in n dimensionali spatio Euclideo situm esse, M_2 continua intra hoc spatium Euclideum deformatione ad superficiem Bolyaianam normalem, quæ in eodem spatio cogitanda est, transferri posse dicere licet. Quas res iam considerabimus, earum initium capimus a superficie normali $F_{r,p}$, cuius r lineas finientes per $a_1, \ldots, a_r$, canales autem per $R_1, \ldots, R_p$ designemus. Lineam finientem a_r fingimus esse punctum delatum (trema), ut, si $r=1$ est, superficies in se ipsam rediens proveniat.

Quæ superficies normalis hoc sectionum systemate in simpliciter connexam secetur:

Primo sectiones $C_k, D_k (k=1, 2, \ldots, p)$ a puncto a_r proficiscentes ponimus, ita ut C_k canalem R_k in longitudinem rescindat, cum D_k nullo puncto, quod a puncto a_r differt, C_k tacto, circum R_k circumferatur; deinde singula linearum finientium $a_1, \ldots, a_{r-1}$ puncta sectionibus $l_1, \ldots, l_{r-1}$ cum a_r coniungimus. Sectiones universas fingimus positas esse iuxta lineas continuas, quæ inter se non secent, quæque tales sint, ut in earum punctis extremis solum directiones discontinue mutentur. Ordine bene dilecto sectiones positæ superficiem $F_{r,p}$ in simpliciter connexam superficiem $\overline{F}_{r,p}$ mutant, cuius linea finiens ex utraque ripa sectionum universarum

$$C_k,\ D_k \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$
$$l_\lambda \qquad (\lambda=1,2,\ldots,r-1)$$

constat. Si lineam ita percurrimus, ut superficies $\overline{F}_{r,p}$ a dextra manu maneat, ripa ipsius l_λ prima tacta negativa (l_λ^-), altera positiva (l_λ^+) velim nominetur. Quomodo sectionum C_k, D_k ripæ designentur, quemque ordinem assumant, ita velim determinetur, ut sectionum ripæ in percurrenda linea finiente superficiei $\overline{F}_{r,p}$ in positivam directionem (id est ita, ut superficies a sinistra maneat) hac serie servata

$$l_{r-1}^-,\ l_{r-1}^+,\ldots,\ l_1^-,\ l_1^+,\ C_1^+,\ D_1^+,\ C_1^-,\ D_1^-,\ldots,\ C_p^+,\ D_p^+,\ C_p^-,\ D_p^-$$

traiciantur.*

Quo facto simpliciter connexam sive planæ, sive curvæ varietatis partem, in qua sit polygonum $\Phi_{r,p}$ simpliciter connexum $4p+2(r-1)$ latera habens, fingimus. Hæc latera, quamvis continua, tamen lineæ quælibet sint. Ea puncta, ubi duæ excipientes lineæ collidunt, polygoni angulos efficiunt. Ab angulo quovis incipientes positiva directione servata ipsius $\Phi_{r,p}$ limitationem percurrimus et latera ex ordine designamus sic:

$$s_{r-1}^-,\ s_{r-1}^+,\ldots,\ s_1^-,\ s_1^+,\ \gamma_1^+,\ \delta_1^+,\ \gamma_1^-,\ \delta_1^-,\ldots,\ \gamma_p^+,\ \delta_p^+,\ \gamma_p^-,\ \delta_p^-.$$

Quibus lateribus continuas singulas simpliciter connexæ superficiei $\overline{F}_{r,p}$ limitationis partes ita assignamus, ut sectionis l_λ ripæ l_λ^-, l_λ^+ lateribus s_λ^-, s_λ^+, sectionis C_k ripæ C_k^+, C_k^- lateribus γ_k^+, γ_k^-, sectionis D_k ripæ D_k^+, D_k^- lateribus δ_k^+, δ_k^- respondeant. Qua ex re sequitur, ut superficies $\overline{F}_{r,p}$ polygono $\Phi_{r,p}$ homœomorpha sit. Duo polygoni $\Phi_{r,p}$ latera esse coniugata, si unius eiusdemque sectionis ipsius $F_{r,p}$ ripæ utrique, polygoni angulorum autem systemate cyclum fieri, si ipsius

* Cf. KLEIN, Mathematische Annalen, tom. XXI. pag. 183. squ.

$F_{r,p}$ puncto uni eidemque respondent, ut POINCARÉ*, dicemus, ut omnis angulus λ_i, ubi coniugata latera s_i^-, s_i^+ collidunt $(i=1, 2, \ldots, r-1)$, per se ipsum cyclum efficiat, cum ceteri anguli, qui omnes ipsius $F_{r,p}$ puncto a_r respondent, coniuncti cyclum efficiant. Hos angulos per

$$\lambda_r^{(i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, 4p+(r-1))$$

designamus, atque ita, ut ipsius s_1^- punctum extremum, quod a λ_1 differt, $\lambda_r^{(1)}$ nominetur, ceteraque $\lambda_r^{(i)}$ ordine, qui crescentibus numeris i constitutus est, polygoni limitationem in negativam directionem percurrendo, succedant. Ad ipsius $\Phi_{r,p}$ angulos ita componendos, ut cycli efficiantur, regula ab illo. POINCARÉ data** valet, quæ a relatione inter polygonum $\Phi_{r,p}$ et superficiem $F_{r,p}$ non dependet. Ab angulo quolibet directione positiva servata latus attiguum, deinde coniugatum, tum punctum extremum sequens, tum latus attiguum, tum coniugatum, tum punctum extremum sequens percurrimus neque desinimus dum ad angulum, a quo egressi sumus revertimus, quocum anguli, quos eo modo transgressi sumus, cyclum una efficiunt.

Qua ratione usi cuivis varietati M_2 $2p+r$-pliciter connexæ, r lineis finientibus limitatæ polygonum, cuius vis $\Phi_{r,p}$ est, assignare possumus, quod polygonum ei varietati, quæ sectionibus aptatis in simpliciter connexam mutata est, homœomorphum est et ad M_2 e situs analysi determinandum plane sufficit.

E contrario in simpliciter connexa varietatis cuiuslibet parte, polygonum, cuius vis sit $\Phi_{r,p}$, datum sit. Hoc polygonum $\Phi_{r,p}$ primo deformationi continuæ subicimus (intra id spatium EUCLIDEUM in quo polygonum continetur), qua deformatione duo eius latera coniugata in congruentes (id est, qui spatii EUCLIDEI translatione ad se trans-

* l. c. pag. 46. squ.

** Acta Mathematica, tom. I, pag. 20, 21.

ferri possunt) lineæ arcus mutantur. Ita polygonum nascitur, quod $\Phi'_{r,p}$ nominemus. Deinde iterum ita deformari fingimus, ut nunc congruentia bina latera infinite alia aliis appropinquent, quam varietatem $\Phi''_{r,p}$ apellamus. Denique lateribus coniugatis binis conglutinatis ad eam varietatem $\Phi'''_{r,p}$ pervenimus, quæ, cum in locis α_i punctis extremis λ_i respondentibus et in loco α_r, qui ex coniunctis angulis $\lambda_r^{(i)}$ provenit, tremata ostendat, $2p+r$-pliciter connexa, r punctis finientibus limitata varietas est. Puncta $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ quæ sunt in extrema superficiei, in lineas quasvis finientes amplificatas esse cogitare possumus, qua re superficies normalis BOLYAIana ipsa prodit, quæ $2p+r-1$ sectionibus in simpliciter connexam varietatem consecari potest. Quæ polygono $\Phi_{r,p}$, a quo egressi sumus, homœomorpha est.

Hinc sequitur, ut omne polygonum, cuius vis est $\Phi_{r,p}$, varietatem $2p+r$-pliciter connexam r lineis finientibus limitatam e situs analysi definiat.

Polygonum $\Phi_{r,p}$ præterea varie transformari potest. Polygono e. g. lineis quibuslibet, quæ ex polygono non exeunt neque se, neque aliæ alias secant, quæque ab anguli puncto proficiscentes ad ceteros angulos ducunt, in $4p+2r-5$ particulas triangulares diviso particularum a duobus polygoni lateribus limitatarum aliqua, sive τ, exsoluta expleri potest homœomorpha, quæ polygono accomodanda est iuxta id latus, quod polygoni laterum, quæ ad τ limitandum pertinent, alicui coniugatum est. Qui modus procedendi, quotiens velis, repeti potest. Polygonum $\overline{\Phi}_{r,p}$, quod eo modo natum est, idem homœomorphum est ei varietati simpliciter connexæ, in quam $2p+r$-pliciter connexa varietas r lineis finientibus limitata sectionum apte dilectarum systemate dividi potest. Polygoni $\overline{\Phi}_{r,p}$, cuius latera bina quoque congruentia sunt, quomodo anguli componendi sint,

ut cycli efficiantur, sequitur ex illi. POINCARÉ regula quam supra commemoravimus. $\overline{\Phi}_{r,p}$ ex $\Phi_{r,p}$ mutationibus e situs analysi concessis provenisse dicimus.

Nunc omnes cursus, in se ipsos redeuntes universos, quos punctum P_0 coordinatas (u_0, v_0) habentes in hac superficie $F_{r,p}$ percurrere potest, contemplabimur. Cursus in se rediens, quem punctum P_0 in superficie percurrit, pro operatione ad hoc punctum adhibita concipi potest,* constituendo, duo cursus, qui continua inter $F_{r,p}$ deformatione ad se transferri possunt, æquivalentes eadem ergo operatione habeantur. Cursibus qui in unum intra $F_{r,p}$ punctum contrahi possunt, aut qu. i. e. qui per se totam bisdimensionalis ipsius $F_{r,p}$ partis finem constituunt, operatio identica assignetur.

Sit porro P_1 superficiei punctum, quod a P_0 differat, atque si eos tres cursus

$$P_0AP_1, \quad P_0BP_1, \quad P_0CP_1,$$

qui a P_0 ad P_1 ducunt, conspicimus, $P_0AP_1CP_0$ cursum ex $P_0AP_1BP_0$ et $P_0BP_1CP_0$ compositum esse dicemus, in qua re componentium ordo non exigui momenti est.**

Si cursus $P_0AP_1CP_0$ in unum punctum contrahi potest, $P_0AP_1BP_0$ et $P_0BP_1CP_0$ cursus contrarios esse dicimus, quod si ita est, cursus $P_0AP_1BP_0$ cursui $P_0BP_1CP_0$, qui e contrario percurritur, æquivalens est.

Si cursui in se redeunti W operatio S, alteri cursui in se redeunti W' operatio S' respondet, cursui ex W et W' composito operatio ex S et S' composita, cursui W contrario operatio S inversa respondet, qua re patet universitate omnium operationum S, quæ omnibus in se redeuntibus cursibus, quos punctum P_0 in superficie $F_{r,p}$ per-

* Cf. Journal für Mathematik (Crelle), tom. 105, pag. 203, POINCARÉ, l. c. pag. 61 squ.

** Cf. POINCARÉ l. c. pag. 62.

currere potest, numerabilem coniunctionem* G, in qua binæ operationes inversæ sunt, effici.

Quæ coniunctio G ex $2p+r-1$ operationibus fundamentalibus hunc in modum componi potest: Ponimus polygonum $\Phi_{r,p}$ simpliciter connexæ superficiei homœomorphum delineatum esse et punctum Π_0, quod in polygono ipso est, quodque ipsius $F_{r,p}$ puncto P_0 respondet, conspicimus. Si A polygoni $\Phi_{r,p}$ lateris supra $+$ signo affecti punctum, A' autem coniugati lateris punctum est, quod in deformationis ipsius $\Phi_{r,p}$ in superficie stadio supra $\Phi''_{r,p}$ designato puncto A infinite vicinum est, cursui AP_0A', si in polygono ipso percurritur, cursus in superficie in se rediens respondet, qui sectionem, cuius ripæ lateribus linea AP_0A' coniunctis respondent, semel transgreditur atque directionem a ripa negativa ad positivam habet.

Cum $\Phi_{r,p}$ omnino bina $2p+r-1$ coniugata latera contineat, hoc modo $2p+r-1$ cursus in $F_{r,p}$ in se redeuntes adipiscimur, quos tales esse apparet, ut omnes in superficie in se redeuntes cursus ex his $2p+r-1$ cursibus igitur coniunctionis G omnes operationes ex his operationibus, quæ his cursibus in se redeuntibus respondent, componi possint. Si autem primo eas operationes, quæ cursibus in se redeuntibus, qui C_k, D_k sectiones a positiva ad negativam ripam transgrediuntur, respondent, S_k, T_k, deinde eam operationem, quæ cursui in se redeunti respondet, qui iuxta lineam finientem a_ν in directionem positivam percurrit, A_ν nominamus, hæc æquatio prodibit:

$$A_r^{-1} = S_1 T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} \dots S_p T_p S_p^{-1} T_p^{-1} A_{r-1} \dots A_1.$$

Coniunctio G magis concrete exprimi potest sic deliberando.

Quod in polygono adhibendo bina quæque latera coniugata duabus

* Coniunctio sc. operationum idem significet, quod Germanice: Gruppe.

lineis in superficie $F_{r,p}$ congruentibus — nempe unius sectionis ripæ utrique — respondent, facile perspicitur, polygonum ab initio ita deligendum esse, ut bina coniugata latera sint lineæ congruentes. Quod ut efficiatur, cum forma et positio non limitentur, polygonum $\Phi_{r,p}$ in EUCLIDEO sive antieuclideo plano delineatum esse ponimus atque ita, ut latera coniugata huius plani translationibus in se ipsum aliud ex alio proveniant. Generalitate non limitata ipsius $\Phi_{r,p}$ latera rectas lineas esse ab initio supponere possumus. Tale polygonum $\Phi_{r,p}$ planum et rectis lineis inclusum velim nominetur polygonum normale.

Quo facto si translationes, quibus bina coniugata huius polygoni normalis latera ad se transferuntur, pro coniunctionis operationibus fundamentalibus habemus, ista coniunctio e plani in se ipsum translationibus composita, coniunctioni G plane æquivalens est.

Coniunctio G, quam ad superficiem $F_{r,p}$ e situs analysi describendam sufficere plane manifestum est, nisi plani translationum coniunctio concipitur, formularum ope exprimi non potest: quod ut consequamur, complurium plani doctrinæ notionum mentio fiat necesse est.

II.

DE PLANI IN SE IPSUM TRANSLATIONUM THEORIA.

Concipimus per planum duarum dimensionum varietatem, quæ in spatio EUCLIDEO nescio quam dimensionem habente continetur ita, ut eius elementum lineare ds positiva definita differentiali forma

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

detur, ad quam expressio ex E, F, G et ex eorum partialibus differentialibus secundum u, v formata, qua expressione GAUSS, vir sum-

mus, superficiei curvaturæ mensura primus usus est, valorem constantem c habet.

Si in u, v eæ expressiones formantur, quæ a deligendis his coordinatis non dependent, qualitates universæ, quæ his expressionibus sunt, disciplinam analyticam constituunt, in cuius formulis quantitas c apparet et quæ plani curvaturæ mensuram c habentis geometria cogitari potest; consentit enim primo, si $c=0$ est, cum geometria plani EUCLIDEI analytica (in quo parallelarum postulatum valet), deinde si c negativum est cum geometria plani analytica, cuius systema est S, cui BOLYAI in Appendice operam dedit, et in quo quantitati a BOLYAI i designatæ valor $\sqrt{-\frac{1}{c}}$ est, denique si c positivum est, cum analytica geometria in sphæra, cuius radius $\sqrt{\frac{1}{c}}$ est, spatii EUCLIDEI soliti, ita, ut planum si $c=0$ est, EUCLIDEum, si $c<0$ est, BOLYAIanum si $c>0$ est, RIEMANNianum dicatur.

Planum ita in universum cogitari posse I. BOLYAI ipse haud ignorare, cum ex nonnullis aliis I. BOLYAI notationibus, quas clarissimus STÆCKEL ex relictis manuscriptis edidit, tum ex §. 9. Responsionis,* quam iam in Introductione commemoravi, cognoscitur, ubi enim de superficie undique uniformi disserens hæc dicit: «Quantitatem illam r», inquit, «qua latera trianguli rectangnli in superficie quavis undique uniformi existentis dividenda sunt, ut statui possit

$$\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r},$$

e. g. parametrum huius superficiei appellare placeat...».

Si I. BOLYAI GAUSS, viri summi, opus, quod inscribitur «Disquisitiones generales circa superficies curvas» et quod anno

* Mathematische und Naturw. Berichte aus Ungarn, tom. XVI, pag. 289.

MDCCCXXVIII editum est, cognovisset, intelligere potuit id quod superficiem undique uniformem appellaverat, cuius parameter r est, nihil aliud esse atque superficiem constantem, a GAUSS designatam, curvaturæ mensuram $c = \frac{1}{r^2}$ habentem.

Nunc autem nihil facit, nisi monstrat, in systemate S et plana et planis æquidistantes superficies (hypersphæras) et sphæras (locos punctorum uno puncto æquidistantium) et parasphæras (superficies F Appendicis) categoriæ superficiei undique uniformis esse et dicit: * «parametri superficierum sphæricarum reales, parametri superficierum plano æquidistantium imaginariæ evadunt», cum ** ad parasphæras parameter in infinitum crescat.

Cum vero quidem in nono Responsionis paragrapho *** planius elaborato dicat, superficiem undique uniformem, F neglecto, solum sphæricam, planam aut plano parallelam (sc. æquidistantem) esse, re vera dicit verum, quoniam in systemate S, ad quod quantitati a BOLYAI i designatæ nescio qui certus valor est, sphæræ, plana, hypersphæræ superficies constantis curvaturæ mensuræ sunt, inter quas semper tales inveniuntur, quarum curvaturæ mensura cuilibet positivæ aut negativæ quantitati æqualis sit, cum parasphæræ sint superficies, in quibus curvaturæ mensura ubique evanescit, ut in eis plani EUCLIDEI geometria valeat, id quod BOLYAI in Appendice (§. 33.) iam præcipue commemoravit.

In hac paragrapho planum consideramus non certam veluti geometricam figuram quandam, quæ varietatis EUCLIDEæ est, sed modo quatenus elementi linearis expressione datum est. Qua re posita theorema valere constat, planum, ut paulo antea descriptum est,

* l. c. pag. 289.
** l. c. pag. 292.
*** ibid. tom. XVIII, pag. 286.

curvaturæ mensura indicata plane definitum esse, id est duo plana, quorum curvaturæ mensura eodem valore est, ad se uniformiter ita referri posse, ut correspondentia elementa linearia eadem sint. Hinc imprimis sequitur, ut plani unius eiusdemque partes aliquæ hoc modo referri possint, id quod plani in se ipsum translationem appellamus. Mihi liceat huius theorematis probandi eam rationem indicare, qua simul ad generalissimam plani translationis constitutionem deducamur.

Si in plano P isometricis coordinatis u, v institutis elementi linearis expressio hæc est:

(1) $$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

ex notis formulis sequitur, ut constans curvaturæ mensura c ita exprimatur

$$c = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2}\right).$$

Functio semper realis ipsorum u, v

(2) $$U = \log\lambda$$

ergo partiali æquationi differentiali

(3) $$\Delta U = -2ce^U,$$

quæ dicitur æquatio LIOUVILLEana, satisfacit, ubi ut usus est, statuetur

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}.$$

Si $z = u + v\sqrt{-1}$ posito, duæ functiones variabilis complexæ z monogeneæ $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ eliguntur ita, ut sit:

(4) $$\varphi = 2e^{-\frac{U}{2}} = c_1\mathfrak{y}_1\bar{\mathfrak{y}}_1 + c_2\mathfrak{y}_2\bar{\mathfrak{y}}_2,$$

ubi c_1, c_2 duos reales constantes denotant, quorum productum

(5) $$c_1 c_2 = c$$

est, ubique $\bar{a}$ complexæ quantitatis a coniugatam designat, resultabit, ut $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ homogeneæ ac lineari æquationi differentio-differentiali

$$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z) . y \tag{6}$$

satisfaciant, ubi

$$q(z) = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{7}$$

est et

$$\mathfrak{y}_1 \frac{d\mathfrak{y}_2}{dz} - \mathfrak{y}_2 \frac{d\mathfrak{y}_1}{dz} = 1 \tag{8}$$

poni potest.

Elementum lineare exprimitur hunc in modum

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(c_1 \mathfrak{y}_1 \bar{\mathfrak{y}}_1 + c_2 \mathfrak{y}_2 \bar{\mathfrak{y}}_2)^2} \tag{9}$$

sive autem, integralium ratione

$$\eta = \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1} = p + q\sqrt{-1} \tag{10}$$

instituta, sic

$$ds^2 = 4 \frac{dp^2 + dq^2}{[c_1 + c_2 (p^2 + q^2)]^2}, \tag{11}$$

quæ forma dicitur elementi linearis plani P canonica forma, item p, q appellantur coordinatæ canonicæ.

Ut altera elementi linearis forma canonica ad alteram

$$ds^2 = 4 \frac{dp_1^2 + dq_1^2}{[c_1 + c_2 (p_1^2 + q_1^2)]^2}$$

transeat, ita efficitur, ut pro systemate fundamentali $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ æquationis differentio-differentialis (6) alterum y_1, y_2, ad quod

$$y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz} = 1,$$

$$c_1 y_1 \bar{y}_1 + c_2 y_2 \bar{y}_2 = c_1 \mathfrak{y}_1 \bar{\mathfrak{y}}_1 + c_2 \mathfrak{y}_2 \bar{\mathfrak{y}}_2$$

est, et deinde

$$p_1 + q_1 \sqrt{-1} = \eta_1 = \frac{y_2}{y_1}$$

ponendum sit.

Quam cum mutationem, elemento lineari non mutato, generalissimæ plani P in se ipsum translationi correspondere manifestum sit, talis translatio ut unimodulari homogenea lineari substitutione, quæ ad $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ applicata formam HERMITEanam

$$\varphi = c_1 \mathfrak{y}_1 \bar{\mathfrak{y}}_1 + c_2 \mathfrak{y}_2 \bar{\mathfrak{y}}_2$$

in se ipsam transformat, ita substitutione proiectiva

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

ad quam

(12) $$c_1 + c_2 \eta\bar{\eta} = (\gamma\eta + \delta)^2 (c_1 + c_2 \eta_1 \bar{\eta}_1)$$

est, exprimitur.

Quas translationes ut planius describamus, eligimus c_1 ita, ut $c_1 = 1$ et c_2 ita, ut $c_2 = c$ sit et distinguimus, utrum $c > 0$, an $c = 0$, an $c < 0$ sit, id est eos casus, ubi planum RIEMANNianum, EUCLIDEum, BOLYAIanum est.

Rectam lineam intellegimus eam lineam, quæ per duo puncta (p_1, q_1), (p_2, q_2) ducitur et ad quam integrale

(13) $$\int_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} ds = 4 \int_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} \sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{[1 + c(p^2 + q^2)]^2}}$$

minimum fit. Hinc generalis rectæ lineæ æquatio sequitur, quæ hanc formam induit:

(14) $$l[1 - c(p^2 + q^2)] + 2mp + 2nq = 0,$$

ubi l, m, n arbitrariæ constantes sunt. Integrale (13), iuxta talem rectam lineam electum duorum punctorum (p_1, q_1), (p_2, q_2) distantia velim appelletur.

Ea puncta, quorum distantia a puncto $p=0$, $q=0$ infinita magnitudine est, ut ad ea

$$1+c(p^2+q^2)=0 \tag{15}$$

sit, plani elementa in infinitum remota componunt. Hæc, si $c>0$ est, imaginaria sunt, si $c=0$ est, unum in infinitum remotum punctum resultat, $p=\infty$, $q=\infty$, sin autem $c<0$ est, puncta in infinitum remota continuum unius dimensionis reale componunt.

Realia plani P puncta sunt ea, quorum distantia a puncto $p=0$, $q=0$ realis est, ita ut, si $c\geqq 0$ est, omnibus valoribus p, q realia plani puncta respondeant. Sed, si $c<0$ est, realia plani puncta offerunt valores reales p, q solum ei, ad quos

$$1+c(p^2+q^2)\geqq 0 \tag{16}$$

est. Coordinatæ p, q sunt tales, ut realibus omnibus binis p, q valoribus, qui, si $c<0$ est, inæquatione (16) limitati sunt, plani punctum, nullo excepto, et vice versa uniformiter respondeat.

Duæ reales rectæ lineæ semper duobus punctis secantur. Si (p_1, q_1), (p_2, q_2) ambo communia duarum rectarum puncta sunt, semper est

$$1+c(p_1+q_1\sqrt{-1})(p_2-q_2\sqrt{-1})=0;$$

duo puncta, inter quæ ea relatio est, polos figuræ (15) in infinitum remotæ coniugatos esse dicimus; qua ex re commune duarum rectarum punctum, si $c>0$, semper utrumque reale est,* sin

* Utroque puncto identificato plani Riemanniani modificatio, quæ a claro. F. Klein primo cognita est, prodit. In hac dissertatione utrumque punctum alterum ab altero differens contemplamur.

$c = 0$, alterum semper ad $p = \infty$, $q = \infty$ vergit, ut alterum reale esse necesse sit, si $c < 0$ est, aut commune punctum utrumque imaginarium esse (coordinatis eis respondentibus p, q ipsis imaginariis factis), aut in punctum in infinitum remotum concidere, aut denique alterum reale, alterum imaginarium esse potest.

Duæ rectæ lineæ, quæ ita se secant, ut angulum nullum efficiant, parallelæ appellantur. In plano RIEMANNiano parallelæ non exsistunt. Si $c \leqq 0$ est, commune duarum parallelarum rectarum punctum utrumque in infinitum semper concidit, atque per punctum quodlibet rectæ lineæ datæ in plano EUCLIDEO una, in plano BOLYAIano duæ parallelæ duci possunt. Duæ BOLYAIani plani rectæ, quarum commune punctum utrumque imaginarium est, nominantur divergentes.

Ad translationes hæc tria theoremata proponi possunt. Primum in plano RIEMANNIANO ($c > 0$) omnes translationes substitutionibus ellipticis

$$\frac{S\eta - \lambda}{S\eta - \mu} = e^{\vartheta\sqrt{-1}} \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}$$

exprimi possunt, ubi fixa puncta λ, μ poli figuræ in infinitum remotæ coniugati sunt, ϑ angulus realis est. Eadem translatio nihil aliud est nisi rotatio, quæ fit donec angulus ϑ formetur circum puncta fixa λ, μ. Deinde in plano EUCLIDEO ($c = 0$) translationes sunt substitutiones ellipticæ aut parabolicæ hanc formam habentes:

$$S\eta = e^{\vartheta\sqrt{-1}}\eta + \beta,$$

alterum autem punctum fixum semper in infinito situm est. Substitutiones ellipticæ offerunt rotationes, quæ fiunt donec angulus ϑ formetur, cum parabolicæ ($\vartheta = 0$), quæ dicuntur translationes parallelæ producant (cf. Introductionem). Tum in plano BOLYAIano ($c < 0$) hoc ita est:

1. Ellipticæ substitutiones

$$\frac{S\eta - \lambda}{S\eta - \mu} = e^{\vartheta\sqrt{-1}}\,\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu},$$

quarum puncta fixa λ, μ poli figuræ in infinitum remotæ coniugati sunt, producunt rotationes, quæ fiunt, donec angulus ϑ formetur circum reale punctum fixum.

2. Substitutiones hyperbolicæ, quarum puncta fixa in infinitum remota sunt, planum iuxta eam rectam transferunt, qua hæc duo puncta fixa coniunguntur, quæ recta, translationis axis nominatur.

3. Substitutiones parabolicæ, quarum unum punctum fixum in infinitum remotum est, plani EUCLIDEI translationibus parallelis correspondent.

In universum translatio quæque rectas in rectas transfert. Ea translatio, quæ rectas lineas se secantes ita in se transformat, ut punctum commune sibi ipsi respondeat, substitutione elliptica, si punctum commune in finito situm est, parabolica autem, si lineæ parallelæ sunt, exprimitur. Translationi, quæ duas rectas divergentes in se transformat, semper respondet substitutio hyperbolica.

Quibus fructibus paucis indicatis ad polygonum normale applicatis, resultat, ut translationes, quibus bina latera coniugata in se transeunt formularum ope proiectivis variabilis complexæ substitutionibus exprimantur, atque ita, ut substitutiones, quæ transitionem a s_ν^- ad s_ν^+ efficiunt, ellipticas aut parabolicas esse necesse sit. Unde sequitur, ut coniunctio G, sicut coniunctio proiectivarum substitutionum, quæ ad variabilem complexam adhibendæ sunt, exprimi possit.

III.

DE REPRÆSENTATIONIS CONFORMITATE. DE DUOBUS PROBLEMATIBUS.

Ut ex considerationibus de situatione geometrica, quæ priore paragrapho paucis indicatæ sunt, ad complexæ variabilis functionum theoriæ notiones transire possimus, relatio, quæ est inter superficiem $F_{r,p}$ et polygonum normale $\Phi_{r,p}$, ita modificanda est, ut homœomorphismo inter sectam superficiem $\overline{F}_{r,p}$ et polygonum $\Phi_{r,p}$ generali homœometria sive uniformiter conformis repræsentatio succedat faciamus. Priusquam autem diligentius deliberemus, num ea conformis repræsentatio fieri possit, ex ea re, quam homœometria postulat, polygonum normale $\Phi_{r,p}$ modo quodam planius definire conemur.

Ne nostræ considerationes generalitate careant, in sequenti superficiem $F_{r,p}$ esse Bolyaianam normalem fingere nos supersedere necesse est, sed superficies $F_{r,p}$ $(2p+r)$-pliciter connexa et bisdimensionalis varietas quælibet, r curvis finientibus limitata, quæ in spatio Euclideo dimensionis numerum quemvis habente continetur, cogitetur velim. Cuiusmodi varietas, cum semper superficiei normali Bolyaianæ homœomorpha sit, sectionum systema canonicum, ad superficiem normalem institutum, ad varietatem illam $F_{r,p}$ deferri potest; idemque ad situs analysis omnes ceteras de superficie normali considerationes pertinet.

Primo ad $F_{r,p}$ isometricas coordinatas u, v institutas esse fingamus, ut igitur superficiei $F_{r,p}$ elementum lineare dS hac æquatione:

$$dS^2 = \Lambda(du^2 + dv^2)$$

detur. Qua re ex principiis, quæ Gauss, vir summus, de conformis

repræsentationis theoria proposuit, si eædem coordinatæ u, v ad puncta plani P, quod polygonum normale $\Phi_{r,p}$ continet, definienda adhibitæ erunt, ipsius P elementum lineare hanc formam:

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

induet, ubi, cum $U = \log \lambda$ partialis æquationis differentio-differentialis Liouvilleanæ (3), Nr. II. solutio sit,

$$\overline{U} = U - \log \varDelta$$

solutionem partialis æquationis differentio-differentialis

$$(3a) \qquad D\overline{U} = -2ce^{\overline{U}} - D \log \varDelta$$

esse necesse sit, si symbolum DV æquatione

$$DV = \frac{1}{\varDelta} \varDelta V$$

explicatur. Aequatio differentialis (3a) æquationi Liouvilleanæ (3) Nr. II. anteferenda est ob eam rem,* quod functio $\overline{U}$ a deligendis coordinatis u, v isometricis ad superficiem institutis non dependet. Functio λ nota putanda est.

Si supponimus coordinatas maxime tales esse, ut superficiei $F_{r,p}$ omni puncto, nullo excepto, bini valores certi u, v respondeant, variabilis $z = u + v\sqrt{-1}$ est functio quæ dicitur monogenea uniformis loci in $F_{r,p}$.**

Ut tales coordinatas u, v exsistere probantes in fructibus iam cognitis niti possimus, facere non possumus, quin linearum finientium numerum r esse aut evanescere aut hunc numerum esse quem-

* Poincaré, Journal des Mathematiques (Liouville). ser. V. tom. IV., pag. 155.

** Ut Klein (Riemann's Theorie etc., 1882, pag. 19.) dixit: Complexa loci functio.

libet fingamus, cum linea finiens quævis nihil nisi trema cogitanda sit. Numerum quemlibet esse etiam velim in sequentibus semper supponatur, ita ut ergo $F_{r,p}$ ex $2p+1$-pliciter connexa in se ipsam redeunte varietate F_p ea re prodeat, quod F_p in r punctis $a_1, \ldots, a_r$ trematibus afficitur. In varietate F_p in se ipsam redeunte semper monogeneas uniformes loci functiones exsistere notum est, quæ varietatis F_p nulli puncto indeterminatæ* fiunt, quæque earum duabus z, t rationali modo exprimi possunt, cum inter z, t ipsas algebraica æquatio $F(z, t) = 0$ genere p sit. Relatio, quæ inter complexos binos valores (z, t) æquatione $F(z, t) = 0$ coniunctos et varietatis F_p puncta est, nulla exceptione mutua ratione uniformis est, ut igitur varietatis F_p puncta, binis complexis (z, t) valoribus eis respondentibus describi possint. Si $z = u + v\sqrt{-1}$ ponimus, u, v sunt ut in F_p, ita in $F_{r,p}$ coordinatæ quæsiti generis.

Quo facto si plani P elementum lineare ds in formam canonicam (11), Nr. II. versum esse fingimus, erit $\eta = p + q\sqrt{-1}$ monogenea ipsius $z = u + v\sqrt{-1}$ functio, quæ linearis differentio-differentialis (6), Nr. II. æquationis integralium ratio definita est, cui his qualitatibus gaudere opus est:

Cum sectæ varietatis $\bar{F}_{r,p}$ repræsentatio in polygonum $\Phi_{r,p}$ mutua et ita uniformis, ut nulla exceptio fiat, esse debeat, η in superficie $F_{r,p}$ functio ipsorum (z, t) undique uniformis et vice versa z et t intra polygonum $\Phi_{r,p}$ uniformes functiones ipsius η sunt. Si superficiei $F_{r,p}$ punctum, binis valoribus (z, t) definitum, sectionem l_ν aliquam positiva directione servata transgreditur, η subit ellipticam aut parabolicam substitutionem $A_\nu \eta$, quæ translationi lateris s_ν^- in s_ν^+ respondet, cum η, puncto (z, t) sectionum C_k, D_k aliquam transgresso, substi-

* Ut sensit Fuchs (Sitzungsberichte Academiæ Berolinensis, 1885, pag. 281.)

tutionem $S_k\eta$, $T_k\eta$ subeat, qua γ_k^- in γ_k^+ sive δ_k^- in δ_k^+ vertitur. Quo fit, ut η in varietate $F_{r,p}$ non secta variabilium (z, t) æquatione $F(z, t) = 0$ coniunctorum functio multiformis sit, et cuncti huius functionis rami ex eo, cuius valorum copia polygoni normalis $\Phi_{r,p}$ punctis exprimitur, eius coniunctionis G, quæ ex translationibus

$$A_1, \ldots, A_{r-1}, S_1, \ldots, S_p, T_1, \ldots, T_p$$

eisque inversis composita est, proiectivis substitutionibus applicatis resultent. Cum universæ ipsius G substitutiones plani P translationes sint, forma HERMITEana φ his substitutionibus in se ipsam transformatur, est igitur uniformis loci functio in $F_{r,p}$, unde sequitur ut variabilis z monogenea functio $\varphi(z)$, æquatione (7), Nr. II. definita, sit monogenea et uniformis loci functio in varietate F_p, ergo uniformis ipsorum (z, t) functio.

$F_{r,p}$ ipsius repræsentationem in $\Phi_{r,p}$ undique conformem esse putaveris, id quod re vera ita est, cum exceptiones solum in locis $a_1, \ldots, a_r$ trematibus exclusis fieri possint. Binis enim valoribus (z, t), qui varietatis F_p punctis a_k respondent, $z = a_k$, $t = b_k$ nominatis,

$$a_k, \ b_k \qquad\qquad (k=1, 2, \ldots, r)$$

functionis η ramificationis puncta esse possunt. Quomodo η in his locis se habeat, ellipticis aut parabolicis substitutionibus A_k $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ et

$$A_r = A_1^{-1} \ldots A_{r-1}^{-1} T_p S_p T_p^{-1} S_p^{-1} \ldots T_1 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1}$$

describitur. Quæ substitutiones quales sint, sequitur rursus ex angulis, qui in singulis polygoni $\Phi_{r,p}$ anguli punctorum cyclis apparent. Si enim angulus, quem latera s_ν^-, s_ν^+ in anguli puncto $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, r-1)$ una claudunt, evanescit, substitutio A_ν parabolica est, sin hic angulus

$2\pi\varphi_\nu$ æqualis est, A_ν est substitutio elliptica hanc formam habens

$$\frac{A_\nu\eta-\lambda_\nu}{A_\nu\eta-\mu_\nu}=e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi_\nu}\frac{\eta-\lambda_\nu}{\eta-\mu_\nu}, \qquad (0<\varphi_\nu\leqq 1).$$

Simili modo summa $2\pi\varphi_r$ angulorum, qui in anguli punctis $\lambda_r^{(i)}$, quæ cyclum efficiunt, apparent, substitutionis A_r naturam definit.

Nunc postulamus, ut monogeneæ et uniformes loci in $F_{r,p}$ functiones non solum intra polygoni normalis $\Phi_{r,p}$ superficiem, sed omnino uniformes ipsius η functiones sint. Quod ad perveniendum necessarium et sufficientem esse manifestum est, quod (z, t) uniformia in η sunt. Ex ea re, quod (z, t) in polygoni normalis $\Phi_{r,p}$ anguli puncta sunt uniformia, sequitur, ut FUCHS, vir illustrissimus, demonstravit, ut quantitates φ_k nisi evanescunt, numeros fractos numeratorem 1 habentes esse necesse sit, utque η in locis $z=a_k$, $t=b_k$ indefinitum esse non possit. Itaque

$$\varphi_k=\frac{1}{g_k}$$

ponere nobis licet, ubi g_k positivus integer numerus finitus aut infinitus est, ut A_k aut periodicæ ellipticæ, aut parabolicæ substitutiones sint.

Si $g_k=1$ est, repræsentatio etiam in loco a_k conformis est, et η ad locum $z=a_k$, $t=b_k$ regulariter se habet, qua in re nequaquam punctum a_k trema habendum est.

Aequationis differentio-differentialis (6), Nr. II. systematis fundamentalis y_1, y_2 elementa sic

$$y_1=\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2=\eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

exprimi posse respicienti differentio-differentialis æquationis resultant hæ qualitates:

Differentio-differentialis æquationis (6), Nr. II. solutiones ad varietatis F_p loca omnia, quæ ab (a_k, b_k) differunt, regulares, id est uniformes, finitæ, continuæ et in locis (a_k, b_k) ipsis non indefinitæ sunt, ut primo $q(z)$ rationalis ipsorum (z, t) functio sit, deinde æquatio differentio-differentialis eius classis, quæ FUCHSiana apellatur, sit, tum æquationum fundamentalium et determinantium, quæ ad puncta singularia $z = a_k$, $t = b_k$ pertinent, radicum differentiæ valores $\frac{1}{g_k}$ assumant. Proiectivarum substitutionum, quas integralium ratio, si punctum (z, t) omnes in F_p in se redeuntes cursus percurrit, subit, universitas, coniunctionis G translationibus datur.

Videmus ad plane definiendum problema, quo de uniformi ac conformi superficiei $F_{r,p}$ repræsentatione in polygonum $\Phi_{r,p}$ normale agitur, angulos in singulis anguli punctis, quæ cyclos efficiunt, dandos esse, atque ita, ut aliquotæ ipsius 2π partes sint, sive quod idem est, trematum $a_1, \ldots, a_r$ cuique numerum integrum quemdam $g_1, \ldots, g_r$ assignandum esse, qui vel infinitus esse potest, quoque quantæ sint angulorum summæ in singulis ipsius $\Phi_{r,p}$ anguli punctorum cyclis, determinatur.

Numeris p, r et $g_1, \ldots, g_r$ autem indicatis plani P, in quo polygonum normale $\Phi_{r,p}$ continetur, vis plane definita est. Curvatura integra enim polygoni $\Phi_{r,p}$ in plano P siti, quod $4p + 2(r - 1)$ rectis lineis includitur, formata secundum GAUSS habemus

$$\iint c\,dw = \sum_{k=1}^{r} \frac{2\pi}{g_k} - (4p + 2r - 4)\pi,$$

ubi dw est area elementi plani P, et integrale per polygonum $\Phi_{r,p}$ extendendum est. Qua æquatione, cum factor $\iint dw$ e natura positivus sit, ut quantitatis c signum, ita plani P natura definitur. In breviter disputando sequitur, ut in casibus quibusdam, qui accurate

indicari possunt, accidat, ut $c > 0$ aut $c = 0$ sit, atque* trivialibus casibus, ubi $p = 0$ et $r < 3$ est, neglectis

$c > 0$ erit, si

1. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 =$ numerus quivis,
2. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 3$,
3. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 4$,
4. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 5$,

$c = 0$ erit, si

5. $p = 1$, $r = 0$,
6. $p = 0$, $r = 4$, $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = 2$, $g_4 = 2$,
7. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = \infty$,
8. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 4$, $g_3 = 4$,
9. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 6$,
10. $p = 0$, $r = 3$, $g_1 = 3$, $g_2 = 3$, $g_3 = 3$;

qua in re videlicet numeri g_k permutari possunt. Omnes ceteri casus c negativum postulant, id est mutue uniformis et conformis varietatis $F_{r,p}$ repraesentatio in universum nisi in polygonum normale, quod in plano Bolyaiano continetur, fieri non potest.

Quibus rebus præmissis nobis duo diversa problemata sunt exsequenda, prout a polygono normali $\Phi_{r,p}$ aut varietate $F_{r,p}$ initium capiamus. Quibus duobus problematibus hanc formam induimus:

I. Est datum polygonum normale $\Phi_{r,p}$, ad quod angulorum in r anguli punctorum cyclis summæ aliquotis 2π ipsius partibus datis æquales sunt aut evanescunt; num $\Phi_{r,p}$ mutue uniformiter et conformiter in simpliciter connexam varietatem $\overline{F}_{r,p}$, quæ ex varietate

* Poincaré, Acta Mathematica, tom. IV. pag. 226.

$F_{r,p}(2p+r)$-pliciter connexa et r trematibus affecta secando prodit, repræsentari possit, quærimus.

II. Est data $2p+1$-pliciter connexa varietas F_p in se rediens, quæ trematibus in locis $a_1, \ldots, a_r$ affectis, in varietatem r lineis finitam mutata est; quorum trematum cuique numerus integer (qui vel infinite magnus esse potest) assignatus est. Simpliciter connexa varietas $\overline{F}_{r,p}$, quæ secando ex $F_{r,p}$ prodit, mutue uniformiter et conformiter in polygonum normale repræsentari num possit, quærimus.

Integrorum numerorum systema

$$(p, r, g_1, g_2, \ldots, g_r),$$

quod problematis cuiusque naturam definit, id problematis signaturam apellamus.

IV.

DE PRIORE PROBLEMATE TRACTANDO.

Sit polygonum normale $\Phi_{r,p}$ datum, id est igitur polygonum rectis lineis inclusum, quod est tale:

Si ipsius $\Phi_{r,p}$ peripheria directione positiva servata percurritur, latera hoc ordine

$$s_{r-1}^-,\ s_{r-1}^+, \ldots, s_1^-,\ s_1^+,\ \gamma_1^+,\ \delta_1^+,\ \gamma_1^-,\ \delta_1^-, \ldots, \gamma_p^+,\ \delta_p^+,\ \gamma_p^-,\ \delta_p^-$$

traiciuntur, bina latera s_k^-, s_k^+; γ_k^-, γ_k^+; δ_k^-, δ_k^+ congruentia sunt; porro ei anguli, qui latera s_k^-, s_k^+ in anguli punctis λ_k una claudunt, æquales sint $\frac{2\pi}{g_k}$, angulorumque summa in ceteris anguli punctis $\lambda_r^{(i)}$ æqualis sit $\frac{2\pi}{g_r}$.

In quibus angulis indicandis ut intelleximus determinatur, planum

P, in quo polygonum $\Phi_{r,p}$ exsistit, RIEMANNianumne, an EUCLIDEum, an BOLYAIanum planum sit; absolutus huius plani curvaturæ mensuræ valor non ultra respiciendus est; si $c \neq 0$ est, c unitati æquale eligere possumus.*

Exempla præcipue duos casus eligemus, quos applicationibus maximi momenti esse patebit (vide Nr. VI.).

1. Sit $r = 1$ et polygoni $F_{r,p}$ angulorum summa æqualis 2π. Qua posita re, si $p = 0$ et ergo $c > 0$ est, nullum est polygonum, id est polygonum planum RIEMANNianum totum explet. Quod planum, cum infinite multis modis in varietatem quamvis simpliciter connexam et in se redeuntem uniformiter et conformiter repræsentari posse perspicuum sit, problema peractum esse dicere possumus, quam ob rem etiam in sequenti hic casus velim neglegatur. Cum, si $p = 1$ est, $c = 0$ habeamus (casus 5., Nr. III.), polygonum nihil aliud fit, nisi EUCLIDEI plani parallelogramma. Si $p > 1$ est, semper $c < 0$ est, polygonumque in plano BOLYAIano in figuram $4p$ latera habentem

$$\gamma_1^+, \delta_1^+, \gamma_1^-, \delta_1^-, \ldots, \gamma_p^+, \delta_p^+, \gamma_p^-, \delta_p^-$$

vertitur, quam EUCLIDEI plani parallelogrammati correspondere, quatenus quattuor latera γ_k^+, δ_k^+, γ_k^-, δ_k^- æqualitatis relationes parallelogrammatis lateribus correspondentes præstant et angulorum summa etiam hic æqualis 2π est, dicere possumus. Eiusmodi figuram in plano BOLYAIano $4p$ latera habentem isogramma generis p nominemus et pro isogrammate generis 1 EUCLIDEI plani parallelogramma habeamus.

* Planum P curvaturæ mensuram c habens, canonicæ coordinatæ (p, q) constanti factore γ multiplicatæ sive generaliter plani P translatio ad $\gamma\eta$ applicata, in planum P' cuius curvaturæ mensura $\gamma^2 c$ est, et cuius elementum lineare ab ipsius P elemento lineari factore γ differt, mutatur ita, ut correspondentes planorum P et P' figuræ similes sint. Si c evanescit, P' in P incidit, quam ob rem in plano EUCLIDEO figuræ similes exsistunt.

Cum substitutio A_r nihil aliud sit nisi substitutio identica, inter translationes S_k, T_k hæc relatio est:

$$T_p S_p T_p^{-1} S_p^{-1} \dots T_1 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} = 1.$$

2. Si $p = 0$, $r \geqq 3$ est, polygonum est figura, quæ $2r - 2$ anguli puncta efficit, et in qua bina latera s_k^-, s_k^+ $(k = 1, 2, \dots, r-1)$ sunt congruentia. Quæ figura in plano RIEMANNiano in casibus solis 1.—4., Nr. III., in EUCLIDEO in eis 6.—10., in omnibus ceteris in plano BOLYAIano est; eiusmodi polygonum ruta appellatur.

In universum polygonum $\Phi_{r,p}$ translationes

$$A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, r)$$
$$S_k,\ T_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

definit atque A_ν parabolicæ seu periodice ellipticæ substitutiones, cum S_k, T_k, si $p = 0$ est, id est præcipue si polygonum in plano RIEMANNiano situm est, omnino non apparent, sin polygonum in plano EUCLIDEO situm est, in casu solo 5., Nr. III., id est, si polygonum in parallelogramma versum est, S_1, T_1 apparent et hæ duæ substitutiones sunt translationes parallelæ, itaque substitutiones parabolicæ. In omnibus ceteris casibus bina latera γ_k^+, γ_k^- et δ_k^+, δ_k^- divergentibus plani BOLYAIani rectis lineis componuntur, ut translationes S_k, T_k substitutiones hyperbolicas esse necesse sit.

Planum polygonum $4p + 2r - 2$ rectis lineis inclusum pro forma (id est translatione quavis intra suum planum excepta) ab $8p + 4r - 7$ realibus constantibus dependet. Cum ad polygonum normale $\Phi_{r,p}$ latera atque bina congruentia sint, $6p + 3r - 6$ constantes, quæ disponi possint, reliquuntur. Faciamus $g_1, g_2, \dots, g_r$ esse data, polygonum normale $\Phi_{r,p}$ signaturam habens

$$(p, r, g_1, g_2, \dots, g_r)$$

a realibus $6p + 2r - 6$ constantibus dependet, qui numerus, si $\Phi_{r,p}$ isogramma generis $p > 1$ est, ad $6p - 6$, si $p = 1$ est, ad 2, si in rutam versum est, ad $2r - 6$ reducitur.*

Qui numerus, ut oportet, cum parametrorum in summa numero convenit, a quibus translationes A_ν, S_k, T_k, quæ polygono normali definitæ sunt, dependent, si signatura data putatur.

Si translationum coniunctionem G ex his translationibus et ex earum inversis compositam contemplamur, omnes eas coniunctiones, quæ ad normalia datæ signaturæ polygona pertinent, holoëdrice isomorphas esse manifestum erit, ut idem numerus, quem supra commemoravimus, realium constantium offerat numerum, a quo holoëdrice isomorpharum translationum coniunctionum classis signatura

$$(p, r, g_1, g_2, \ldots, g_r)$$

definita dependet. Parametri constantes, a quibus polygonum normale $\Phi_{r,p}$, quod determinatæ signaturæ est, pendet, solum inæqualitatis condicionibus quibusdam limitati sunt.

Si horum parametrorum omne valorum systema spatii Σ EUCLIDEI, cuius dimensionum numerus ν cum numero supra invento convenit, puncto expressum esse fingimus, hæc puncta ν dimensionum varietatem M_ν, quæ in Σ continetur, explebunt, ut omni signaturæ datæ polygono normali varietatis M_ν punctum correspondeat.

Ill. POINCARÉ** id theorema, quod sequentis disquisitionis fundamentum factum est, hanc varietatem M_ν in se redeuntem esse, probavit.

Cunctis ad nostrum polygonum $\Phi_{r,p}$ translationum coniunctionis G, quæ hæc polygono determinata est, translationibus applicatis in

* Vide POINCARÉ, Acta Mathematica, tom. I; KLEIN, Mathem. Annalen, tom. XXI, pag. 196.
** Acta Mathematica, tom. IV, pag. 250.

plano F polygonorum, quæ cum $\Phi_{r,p}$ congruunt, reticulum adipiscimur. Ex ratione, cuius autor ill. POINCARÉ est,* ut ad casum, ubi polygonum in plano BOLYAIano exsistit, ita in universum, ficti reticuli polygonis totum planum simpliciter ac sine lacunis contegi ostendi potest.

Translationum coniunctionis G qualitas, quæ ex rebus hoc modo inventis cognoscitur, coniunctionis G discontinuitas appellatur, ut necessaria et sufficiens condicio, qua translationum coniunctio polygono normali $\Phi_{r,p}$ definita sit discontinua, ea re contineatur, quod angulorum in anguli punctorum cyclos nascentium summæ aut evanescunt, aut ipsius 2π aliquotæ partes sunt, seu breviter, ea re, quod ellipticæ inter substitutiones fundamentales $A_1, \ldots, A_r$ periodicæ sunt.

Si $\Phi_{r,p}$ in plano RIEMANNiano exsistit, cum totius plani RIEMANNiani area finito valore $\frac{4\pi}{c}$ sit, ut reticuli polygonorum numerus, ita discontinuæ translationum coniunctionis G substitutionum numerus finitus est, atque in casibus 1.—4., Nr. III. est æqualis $2g_3$, 12, 24, 60; cum item planum RIEMANNianum, cuius curvaturæ mensura c est, semper in sphæram EUCLIDEI spatii tres dimensiones habentis devolvi possit, hoc modo ad eam rationem, qua sphæræ superficies in polygona sphærica ac congruentia dividi potest, pervenimus.**

Si $c \leqq 0$ est, ut reticuli polygonorum numerus, ita numerus substitutionum discontinuæ translationum coniunctionis G infinite magnus est. Ut problema I. exsequamur, nobis ostendendum est, complexæ variabilis η monogeneas exsistere functiones, quæ intra $\Phi_{r,p}$ rationalium functionum vim habent et quarum valores in correspondentibus congruentium ipsius $\Phi_{r,p}$ laterum punctis conveniunt. Tales functiones,

* Acta Mathematica, tom. I, pag. 27; Cf. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, tom. II. pars. II. (Lipsiæ 1898.) pag. 104. squ.

** SCHWARZ, Journal für Mathematik. (Crelle), tom. 75, pag. 292.

quæ coniunctionis G sunt, automorphas functiones, ut ill. KLEIN, nominamus. Quod sine ulla difficultate ostendi potest, si $p=0$, $r=3$ est; et hos casus et nonnullos, qui facile tractandi sunt, alios præcipiamus, ut quæ sunt exempla ad sequentes generales investigationes facilius intelligendas idonea habeamus.

Si $p=0$, $r=3$ est*, polygonum est quattuor laterum ruta, quæ cum numerus $6p+2r-6=0$ sit, tribus numeris g_1, g_2, g_3 indicatis plane definitur. In æquatione (6), Nr. III. differentio-differentiali, cum $p=0$ sit, coëfficiens $q(z)$ functio ipsius z rationalis est, et, ut semper, si $p=0$ est, varietatem F_p planum EUCLIDEum, in quo complexæ variabilis z valores, ut usus est, repræsentantur, eligere nobis licet; cum præterea lineari transformatione ad z adhibita tria tremata a_1, a_2, a_3 in puncta 0, 1, ∞ z-plani transponere nobis liceat atque æquatio (6), Nr. III. classis FUCHSianæ sit et determinantium æquationum fundamentalium radicum differentiis $\frac{1}{g_1}$, $\frac{1}{g_2}$, $\frac{1}{g_3}$ valores esse necesse sit, hæc æquatio differentialis forma

$$(G) \qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{\frac{1}{g_1^2}-1}{z^2}+\frac{\frac{1}{g_2^2}-1}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}-\frac{1}{g_3^2}-1}{z(1-z)}\right\}$$

prodit, quæ est in summa differentialis æquatio GAUSSiana. Qua ex æquatione z integralium rationis η functionem automorpham re vera resultare demonstratur. Si $c>0$, id est in casibus 1.—4., Nr. III., hæc uniformis functio est rationalis, qua ad eos casus, in quibus æquatio (G) quæ dicuntur regularium solidorum functiones definit, pervenimus. Si $c=0$ est, casus 7., Nr. III. z simpliciter pe-

* SCHWARZ, l. c.; KLEIN, Ikosaëder (Lipsiæ, 1884); KLEIN-FRICKE, Modulfunctionen (Lipsiæ, 1890) pag. 65, sqq.

riodicam ipsius η functionem offert, in casibus 8.—10., Nr. III. z biperiodica ipsius η functio fit, quæ multiplicationem complexam per secundam aut tertiam unitatis radicem patitur. In casibus, qui $c<0$ correspondent, variabilis η functio z non exsistit, nisi ipsi η valores, qui realibus plani BOLYAIani punctis correspondent, id est ii, ad quos $1+c\eta\bar{\eta}\geqq 0$ est, tribuuntur, præterea præbet hæc functio uniformiter conformem z-plani EUCLIDEi idoneis sectionibus $(0, \infty)$, $(1, \infty)$ secti repræsentationem in BOLYAIani plani rutam quadrangulatam. Si $g_1=g_2=g_3=\infty$, in quo casu huius rutæ quattuor anguli puncta sunt plani BOLYAIani puncta in infinitum remota, quæ modulares functiones ellipticæ dicuntur,* producuntur.

Iis casibus, in quibus polygonum $\Phi_{r,p}$ in plano RIEMANNiano situm est, peractis, eorum casuum, ubi $\Phi_{r,p}$ in plano EUCLIDEO exsistit, duo solum nempe 5., 6., Nr. III. relinquuntur.

In priore 5., in quo $\Phi_{r,p}$ EUCLIDEI plani parallelogramma Φ_1 est, ellipticarum functionum theoria uniformes ipsius η functiones eas, quibus intra parallelogramma Φ_1 rationalium functionum vis est, quæque in oppositis ipsius Φ_1 lateribus eandem valorum seriem assumunt, id est automorphas functiones, quæ ad Φ_1 pertinent, præbet. Quo modo formandæ sint, a duarum geometricarum quantitatum, quæ ipsius Φ_1 latera exprimunt, ratione τ dependet, quod est duabus realibus constantibus æquivalens complexa constans, a qua parallelogramma Φ_1 præcipue dependet. Variabilis η functiones automorphæ (ellipticæ), quæ ad Φ_1 pertinent, earum duabus

$$z=\varphi(\eta), \quad t=\psi(\eta),$$

inter quas algebraica generis 1 æquatio est, via rationali exprimi pos-

* Vide FUCHS, Journal für Mathematik (Crelle), tom. 83; DEDEKIND, ibidem; KLEIN-FRICKE, l. c.

sunt et binis valoribus (z, t) omnibus punctum intra parallelogramma Φ_1 et vice versa respondet. Si

$$t = x + y\sqrt{-1}, \quad z = u + v\sqrt{-1}, \quad \eta = p + q\sqrt{-1}$$

ponimus, x, y, u, v sunt uniformes ipsorum p, q functiones, quæ nobis, si e. g. x, y, u, v pro EUCLIDEI spatii, cui quattuor dimensiones sunt, coordinatis habemus, duarum dimensionum varietatem F_1, cuius elementum lineare est

$$dS^2 = |dz|^2 + |dt|^2 = \{|\varphi'(\eta)|^2 + |\psi'(\eta)|^2\}(dp^2 + dq^2),$$

definiunt. Functionum z, t ope in F_1 duo linearum cursus, ipsius Φ_1 lateribus correspondentes determinantur, quæ sectiones C_1, D_1, quibus F_1 in simpliciter connexam varietatem $\overline{F_1}$ secetur, cogitandæ sunt, quæ varietas varietati Φ_1 homœometrica est. F_1 in z-planum EUCLIDEUM proiecto, superficiem RIEMANNianum solitam, quæ ipsius z functionis t ramorum nexum repræsentat, adipiscimur. z apte electo, η elliptico primæ speciei integrali

$$\eta = \int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$$

exprimitur, cuius integralis modulus k^2 quantitate τ elliptica modularis functio quamvis uniformiter, tamen transcendenter definitus est.

In casu 6., polygonum $\Phi_{r,p}$ in plano EUCLIDEO situm est figura, quæ anguli puncta sex efficit, quæque triangulum apparet, in quo omnia puncta, quibus singula latera in duas æquales partes dividuntur, anguli puncta habenda sunt, id quod præcipue a duabus realibus constantibus dependet. Cum $p = 0$ sit, z apte electo quattuor trematum tria e. g. a_1, a_2, a_4 in plano EUCLIDEO, quod $F_{r,p}$ cogitandum est, in $0, 1, \infty$ transponere possumus, qua re differentialis æquatio

(6), Nr. III. hanc formam induit*

$$(F) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = \left\{ \frac{1}{4}\frac{R''}{R} - \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R} \right\} y,$$

ubi

$$R = z(z-1)(z-a_3)$$

est, et λ, a_3 constantes, quæ etiam determinandæ sunt, denotant. Ex condicione, qua substitutiones proiectivæ, quas ratio integralium η variabili z circumcurrente subit, plani EUCLIDEI translationes sint, λ evanescit, constans autem complexa a_3, duabus realibus constantibus, quæ polygonum $\Phi_{r,p}$ definiunt æquivalens, uniformi modo determinatur atque ita, ut, cum

$$\eta = \gamma_1 \int \frac{dz}{\sqrt{R}} + \gamma_2,$$

ubi γ_1, γ_2 constantes sunt, esse reperiatur, in summa rursus elliptica functio modularis sit.

Quo modo casibus, in quibus $c \geqq 0$ est peractis, ab initio supponere possumus polygonum $\Phi_{r,p}$ in plano BOLYAIano situm esse; si ita est, discontinua translationum coniunctio G FUCHSiana quæ autem automorphæ functiones eius sunt, functiones FUCHSianæ appellantur, quas functiones exsistere probandi patent duæ viæ, ad quas investigandas hic transgrediamur.

Altera, ab illo. KLEIN** monstrata, iisdem principiis, quorum ope varietati duarum dimensionum in se ipsam redeunti (superficiei RIEMANNianæ) monogeneas et uniformes loci functiones exsistere demonstratur, continetur, neque ad eam rem solam pertinet, quod polygonum in plano BOLYAIano situm est, perinde suppositione

* FUCHS, Nachrichten Societatis Gottingensis, 1881, pag. 445.

** Mathem. Annalen t. XXI, pag. 141; RITTER, ibidem, tom. XLI, pag. 1, tom. XLIV, pag. 349; cf. KLEIN-FRICKE, Automorphe Functionen, tom. II, (Lipsiæ, 1901).

summas angulorum, qui in ipsius $\Phi_{r,p}$ anguli punctis, quæ cyclum efficiunt, nascuntur, ipsius 2π aliquotas partes esse neglecta ad optatum nos deducit.*

Altera via, cuius autor ill. POINCARÉ est,** functiones FUCHSianas exsistere ita probatur, ut hæ funtiones seriebus quibusdam convergentibus exprimantur, quæ via ipsa tum solum ineunda est, si polygonum normale $\Phi_{r,p}$ in plano BOLYAIano exsistet eiusque anguli eis condicionibus, ex quibus coniunctionis G discontinuitas sequitur, satisfacient. Posita est in ea cogitatione, quæ etiam ad proponendas quæstiones generaliores magni momenti est:

Si coniunctionis G FUCHSianæ polygono $\Phi_{r,p}$ determinatæ substitutiones serie aliqua electa

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ (S_0=1),$$

designamus et $H(\eta)$ rationalem ipsius η functionem aliquam, quæ in nullo plani BOLYAIani loco η in finito sito infinita est, denotat, series infinita

(1) $$\Theta(\eta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}H(S_\nu\eta)\left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m,$$

designante m positivum integrum unitate maiorem numerum, absolute et uniformiter convergit ad omnes valores complexos ipsius η, et eis, qui æquationi

(2) $$1+c\eta\bar{\eta}=0$$

satisfaciunt et exceptis eis, ad quos rationalium functionum $H(S_\nu\eta)$ aut $\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}$ aliqua infinitum fit.

* Si angulorum summæ non aliquotæ ipsius 2π partes sunt, variabilis η functiones, quas exsistere probabitur, iam non undique uniformes esse perspicuum est.

** Acta Mathematica, tom. I. pag. 193. squ.

III. POINCARÉ seriem (1), quam seriem Theta-FUCHSianam designavit, duabus diversis rationibus convergentem esse probavit; utrique commune est id, quo seriei (1) convergentiam a convergentia seriei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m \tag{3}$$

dependere demonstratur.

Prior probandi ratio præcipue ea re nititur, quod planum BOLYAIanum S, in quo polygonum $\Phi_{r,p}$ continetur, in planum EUCLIDEUM Σ, cuius elementum lineare ds æquatione

$$ds = |d\eta| = \sqrt{dp^2 + dq^2}$$

expressum est, ita conformiter repræsentatur, ut plani S realibus punctis omnibus plani Σ puncta intra circulum (2), punctis autem plani S in infinitum remotis circuli (2) peripheriæ Σ-puncta respondeant. Si tum e. g. circum punctum η, quod intra eam plani Σ regionem $\overline{\Phi}_{r,p}$ positum sit, quæ polygono $\Phi_{r,p}$ respondet, aliquam partem C_0 limitatam esse, quæ intra $\overline{\Phi}_{r,p}$ tota sita sit, fingimus et si omnes regiones C_ν, quæ ex C_0 substitutionibus S_ν applicatis prodeunt, delineamus, hæc cunctæ intra circulum (2) sunt neque ex coniunctionis G discontinuitate, aliæ alias contegere possunt, itaque tota earum arearum, quæ e geometria EUCLIDEA mensuratæ sunt, summa, cum minor sit quam circuli (2) area, valorem habet finitum; qua ex re sponte sequitur, ut series (3) convergens sit.

Altera probandi ratio plani BOLYAIani S mensura sola utitur. Circulorum series C_1, C_2, ... ita delineetur, ut commune iis centrum punctum $\eta = 0$ sit, quorum radii e geometria BOLYAIana mensurati progressione arithmetica crescant. Si U_n seriei (3) eorum terminorum, ad

quos η intra $\Phi_{r,p}$ delecto puncta $S_\nu \eta$ in annulo a C_{n-1} et C_n limitato sunt sita, summa est,

$$U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)\rho}}$$

esse patet, ubi K constans definita, ρ autem circuli C_1 radius est, unde sequitur, ut series (3) rapidius convergat quam series geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{e^{n(m-1)\rho}}.$$

Ex eadem probandi ratione realibus $6p+2r-6$ parametris, qui polygonum $\Phi_{r,p}$ signatura data determinant, intra fines quosdam variatis, seriem (1), cum ad illos parametros uniformiter convergens sit, continuam eorum functionem esse cognoscitur.

Itaque series (1) ad eos η-valores, qui plani BOLYAIani punctis realibus correspondent, id est quæ inæquationi

$$1 + c\eta\bar{\eta} > 0$$

satisfaciunt, monogeneam et uniformem ipsius η functionem, quæ intra polygonum $\Phi_{r,p}$ in finito locorum numero solo æque ac functio rationalis infinita fit, exprimit; ad quam functionem plani S punctorum in infinitum remotorum, id est eorum valorum, qui æquationi (2) satisfaciunt, universitas finis naturalis est. Eandem seriem (1) ad η-valores, qui inæquationi

$$1 + c\eta\bar{\eta} < 0$$

satisfaciunt, uniformem functionem, cui valores, qui æquationi (2) satisfecerunt, finem naturalem constituunt, exprimere in nostris sequentibus deliberationibus non respiciendum est; quidquid id est inter has

duas functiones, quamvis una eademque expressione analytica exprimantur, nullam cohærentiam analyticam esse tantum constat. Itaque omnibus ceteris rebus omissis ei functioni serie (1) ad realia plani BOLYAIani puncta definitæ, quæ functio Theta-FUCHSiana designatur, operam demus.

Quam functionem æquationi functionali

$$\Theta(S_k\eta)=\left(\frac{dS_k\eta}{d\eta}\right)^{-m}\Theta(\eta) \tag{4}$$

satisfacere manifestum est, ita ut talium functionum Theta-FUCHSianarum diversis functionibus rationalibus $H(\eta)$ eodem autem numero m formatarum rationalis homogenea forma gradus 0 non mutetur, si ad η coniunctionis FUCHSianæ G substitutio applicata erit, quæ forma, cum intra $\Phi_{r,p}$ in finito locorum numero æque ac rationalis functio infinita fiat, functionem FUCHSianam ad $\Phi_{r,p}$ pertinentem exprimit. Talem functionem quamque earum duabus

$$z=\varphi(\eta),\quad t=\psi(\eta),$$

inter quas æquatione algebraica $F(z,t)=0$ generis p relatio est, rationaliter exprimi posse patet.

Si

$$z=u+v\sqrt{-1},\quad t=x+y\sqrt{-1}$$

ponimus duabus ipsius η functionibus z, t in spatio EUCLIDEO (u, v, x, y), cui quattuor dimensiones sunt, duarum dimensionum $2p+1$-pliciter connexam varietatem $F_{r,p}$ selectam habemus, quæ in r punctis, polygoni $\Phi_{r,p}$ angulis correspondentibus, trematibus affecta est. Quæ varietas iuxta curvas ipsius $\Phi_{r,p}$ lateribus correspondentes secta in simpliciter connexam varietatem vertitur, quæ ad polygonum $\Phi_{r,p}$ homœometrica esse videtur. Si $F_{r,p}$ in complexæ variabilis z repræ-

sentationis planum proiicimus, solita superficies RIEMANNiana, quæ ad ipsius z algebraicam functionem t pertinet et quæ in r locis, polygoni $\Phi_{r,p}$ anguli punctis correspondentibus, trematibus affecta est, prodit.

Priore problemate ita peracto duabus functionibus $z = \varphi(\eta)$, $t = \psi(\eta)$ polygoni $\Phi_{r,p}$ mutationem in varietatem in se ipsam redeuntem et r trematibus affectam, quæ mutatio in paragrapho II. e situs analysi continua ipsius $\Phi_{r,p}$ deformatione et coniugatis lateribus conglutinatis effecta est, re vera ita factam esse dicere possumus, ut varietas orta, aut exactius ei correspondens et simpliciter connexa, polygono $\Phi_{r,p}$ non modo homœomorpha sed etiam homœometrica sit.

V.

DE ALTERO PROBLEMATE TRACTANDO.

Qua in re nobis e $2p+1$-pliciter connexa et in se ipsam redeunte varietate, cuius duæ dimensiones sunt, quæque in r locis $a_1, \ldots, a_r$ trematibus est affecta, ita ut tremati cuique certus et integer numerus assignatus sit, proficiscendum est. Eæ huius varietatis F_p loci functiones, quæ uniformes et monogeneæ sunt, earum duabus z, t via rationali exprimi possunt, cum z et t algebraica æquatione $F(z, t) = 0$ generis p coniungantur. Algebraica functio t ipsius z superficiem RIEMANNianam per EUCLIDEum z-planum extensam, quæ varietati F_p datæ homœometrica est, definit. Si non a varietate in se ipsam redeunte, sed ab æquatione $F(z, t) = 0$ algebraica, quæ generis p inter duas variabiles z, t est, proficiscimur, in superficie RIEMANNiana R_p efficienda, quæ supra z-planum EUCLIDEum extensa est et quæ nexum functionis algebraicæ t exprimit, nulla difficultate implicamur.

Quam $2p+1$-pliciter connexæ varietati in se ipsam redeunti e. g. superficiei normali BOLYAIanæ homœomorpham esse, ex iis rebus, quas in Nr. I. inquisivimus, perspicuum est, num autem R_p e. g. ad normalem superficiem BOLYAIanam homœometrice referri possit, nondum diiudicatum est.* Quam ob rem alteri problemati formam induentes, a superficie RIEMANNiana supra EUCLIDEum planum complexæ variabilis z extensa et $2p+1$-pliciter connexa, quæ algebraicam ipsius z functionem t definit, primo proficiscamur, deinde postquam hanc superficiem r trematibus, quæ locis

$$z = a_k, \quad t = b_k \qquad (k=1, 2, \ldots, r)$$

affecta sunt, in $R_{r,p}$ vertimus et tremati cuique (a_k, b_k) numerum integrum g_k assignavimus, num simpliciter connexa superficies $\overline{R}_{r,p}$, quæ ex $R_{r,p}$ sectionibus apte electis prodit, ad polygonum $\Phi_{r,p}$ signaturæ $(p, r, g_1, \ldots, g_r)$ normalem homœometrice referri possit, quæramus. Ex analysi hæc quæstio sic proponi potest:

Nobis, ut polygonum normale $\Phi_{r,p}$ definiatur, fieri posse supponentibus, $\eta = p + q\sqrt{-1}$ æquationis differentio-differentialis

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = q(z, t) y \tag{1}$$

integralium ratio definitur, in qua æquatione $q(z, t)$ variabilium z, t, æquatione generis p

$$F(z, t) = 0, \tag{2}$$

quæ data putanda est, coniunctarum, functionem rationalem denotat. Quam ad functionem rationalem determinandam quæstionibus datis (cf. Nr. III.) offeruntur hæ condiciones: Aequatio differentialis

* Cf. POINCARÉ, Journal de Mathématiques (Liouville), series V, tom. IV, pag. 149.

(1) est classis FUCHSianæ, id est eius integralia nusquam indefinita, æquationum fundamentalium et determinantium, quæ singularium punctorum (a_k, b_k) sunt, radicum differentiis sunt valores $\frac{1}{g_k}$, ad omnia cetera loca (z, t) integralium ratio η regulariter se habet, id est in superficie R_p uniformis, finita, continua est. Generaliter hæ condiciones solæ ad $q(z, t)$ plane definiendum non sufficiunt, sed constantium, quæ algebraice definiri non possunt et quæ cum claro. KLEIN parametros accessorios nominamus, numerus quidam relinquitur. Solum si $p = 0$, $r = 3$ est, parametrorum accessoriorum numerus evanescit, in quo casu hoc problema revera Nr. IV. considerationibus peractum est; idem pertinet ad casus 5., 6., Nr. III., in quibus, quamquam accessorii parametri apparent, functionum ellipticarum theoria ipsa, quomodo definienda sint, indicat. Nihilo secius casus hoc modo peracti, in quibus polygonum normale $\Phi_{r,p}$ in plano RIEMANNiano aut EUCLIDEO situm est, id est in quibus numerus

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{g_k} - (2p + r)$$

positivus est aut evanescit, in sequentes considerationes velim iniiciantur.

Ubi $q(z, t)$ ex condicionibus, quæ quæstionibus datis offeruntur electum est, æquatio differentialis (1) appellatur normalis æquatio.* Omnes æquationes differentiales (1), quæ diversis accessoriorum parametrorum valoribus differunt, typo amplectimur, ita ut hoc problema nihil aliud sit atque:

num in æquatione differentio-differentiali (1) parametri accessorii ita definiri possint, ut proiectivarum substitutionum,

* POINCARÉ, Acta Mathematica, tom. IV, pag. 223.

quas integralium ratio η subit, ubi punctum (z, t) omnes cursus in se ipsos redeuntes in superficie RIEMANNiana percurrit, coniunctio* e meris translationibus plani P, quod problematis signatura ad suam naturam definitum est, composita sit?

Quam rem ut in universum peragamus, compluribus methodis, quas singillatim paucis describamus, uti possumus.

1. De continuitatis methodo.**

Si supponimus in normali polygono solum ea data, quæ problematis signaturam determinant, constituta esse, id est igitur numeros $p, r, g_1, \ldots, g_r$ neque superficiem RIEMANNianam R_p, sive æquationem algebraicam (2), neque trematum positionem (a_k, b_k), coëfficiens $q(z, t)$ etiam ab realium parametrorum numero N quodam dependet. Quorum parametrorum valorum systemate omni varietatis $\overline{M}$ punctum significetur, ita ut signatura data, omnis æquationum differentialium (1) typus huius varietatis puncto correspondeat. Qua cum varietate $\overline{M}$ eam M_ν, quæ in Nr. III. ea re definita erat, quod omne punctum ipsius M_ν polygono normali $\Phi_{r,p}$, cuius signatura est $(p, r, g_1, \ldots, g_r)$ correspondet, si conferimus, ex antecedentis paragraphi IV. fructibus omni puncto ipsius M_ν punctum ipsius M probe determinatum correspondere dici possumus.

Cum autem theorema,*** intra æquationum differentialium (1) typum unam æquationem unicam, cuius monodromiæ coniunctio e meris plani P translationibus composita est, exsistere posse valeat, ipsius $\overline{M}$ puncto unum ipsius M_ν punctum unicum correspondet. Quoniam in Nr. III. varietatem M_ν in se ipsam redeuntem esse cognovimus, sequitur, ut e contrario omni varietatis $\overline{M}$ puncto ipsius

* Quæ dicitur æquationis differentialis (1) monodromiæ coniunctio.

** POINCARÉ l. c. pag. 233 squ.; KLEIN, Mathematische Annalen, tom. XX..

*** POINCARÉ, l. c. pag. 231.

M_ν punctum correspondeat necesse sit, id est, ut omni æquationum differentialium (1) typo polygonum normale $\Phi_{r,p}$ correspondeat, quam ob rem quæstio supra proposita cum affirmatione respondenda est.

2. De æquationis differentialis LIOUVILLEanæ ratione ac via integrationis.*

Primo $2p+1$-pliciter connexam varietatem F_p in se ipsam redeuntem, cui dimensiones sunt duæ, e. g. normalem BOLYAIanam superficiem datam esse supponimus; z, t sint duæ uniformes et monogeneæ loci in F_p functiones, quæ algebraica æquatione $F(z, t) = 0$ coniunguntur. Deinde, si $z = u + v\sqrt{-1}$ statuitur, ipsius F_p elementum lineare dS æquatione

$$dS^2 = \Lambda(du^2 + dv^2) \tag{3}$$

exprimitur, in qua Λ ipsorum u, v functionem, quæ nota habenda est, significat. Varietas F_p in locis

$$z = a_k, \quad t = b_k \tag{4}$$

trematibus affecta, superficies $F_{r,p}$ curvis finita prodit, cuius signaturam numeris integris g_k trematibus (a_k, b_k) assignandis constituimus. Si polygonum normale $\Phi_{r,p}$ simpliciter connexæ varietati $\overline{F}_{r,p}$, quæ ex $F_{r,p}$ secta prodit, homœometricum exsistit, plani P, in quo $\Phi_{r,p}$ situm est, elementum lineare ds forma

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2) \tag{5}$$

exprimi posse necesse erit, ubi (cf. Nr. III.)

$$U = \log \lambda$$

æquationi LIOUVILLEanæ

$$\Delta U = -2ce^U,$$

et ergo

* POINCARÉ, Journal de Mathématiques (Liouville), series V, tom. IV, pag. 137—230; cf. PICARD, ibid. series IV, tom. VI, IX, series V, tom. IV.

$$\bar{U} = U - \log \varDelta = \log \frac{\lambda}{\varDelta}$$

æquationi differentio-differentiali

$$(6) \qquad D\bar{U} = -2ce^{\bar{U}} - D \log \varDelta$$

satisfacit, in qua æquatione

$$DV = \frac{1}{\varDelta} \Delta V$$

statuendum est. Unde sequitur, ut variabilis η, qua ad relationem inter $\varPhi_{r,p}$ et $\overline{F}_{r,p}$ homœometricam pervenimus, linearis æquationis differentio-differentialis

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} = q\,(z, t) y,$$

ubi

$$(8) \qquad q\,(z, t) = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \varphi = \frac{2}{\sqrt{\varDelta}} e^{-\frac{\bar{U}}{2}}$$

est, integralium ratio appareat neque dubium sit, quin differentialis æquatio (7) sit normalis æquatio, qualem supra descripsimus. Cum condiciones supra commemoratæ, quibus, ut ex quæstionibus datis sequitur, $q\,(z. t)$ subiciendum est, quomodo $q\,(z, t)$ ad omnia superficiei $F_{r,p}$ loca se habeat, definiant, eædem, quomodo realis functio $\bar{U}$ realium variabilium u, v se habeat, definiunt et $\bar{U}$ per totam superficiem $F_{r,p}$ uniformem et continuam esse atque trematibus (a_k, b_k) modo numeris g_k solum determinato infinitum fieri patet.* Qua ex re** functio realis h in superficie $F_{r,p}$ (trematibus exclusis) uniformis et finita indicari potest, ita ut functio

* Poincaré, l. c. pag. 157.
** Poincaré, l. c. pag. 160.

$$\overline{\overline{U}} = \overline{U} + h = U - \log \varLambda + h$$

per totam superficiem F_p finita maneat, quæ functio $\overline{\overline{U}}$ æquationi

$$(9) \qquad D\overline{\overline{U}} = \Theta e^{\overline{\overline{U}}} - \Phi$$

satisfacit, ubi

$$\Theta = -2ce^{-h}, \qquad \Phi = D \log \varLambda - Dh$$

statutum est. Functiones Θ, Φ quæstionibus datis sunt definitæ, Θ semper a zero differt, $\frac{\Phi}{\Theta}$ semper finitum habet valorem, integralique

$$\iint \Phi \varLambda\, du\, dv$$

per superficiem F_p extenso facile est intelligendum* esse hunc valorem

$$4\pi \left\{ 2p + r - 2 - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{g_k} \right\},$$

qui (cf. pag. 30) nihil aliud est, nisi polygoni normalis $\Phi_{r,p}$ signaturam

$$(p, r, g_1, \ldots, g_r)$$

habentis curvatura integra dupla et signo opposito affecta.

Nunc agitur de investigando, num superficie F_p data, trematibus (a_k, b_k) datis, integris numeris g_k datis, id est igitur functionibus $\varLambda$, Θ, Φ datis, partiali æquationi differentio-differentiali (9), functione $\overline{\overline{U}}$ per totam superficiem F_p in se ipsam redeuntem uniformi et finita, satisfieri possit. Quam solutionem exsistere, PICARD et POINCARÉ, viri illustrissimi, diversis rationibus adhibitis probaverunt.

Nobis non a superficie F_p in se ipsam redeunte, sed ab æquatione $F(z, t) = 0$ generis p proficiscentibus, viis ac rationibus paulo

* POINCARÉ, l. c. pag. 227.

ante expositis modificandis opus est. Si enim ponimus R_p esse superficiem RIEMANNianam solitam, quæ ipsius z functionis algebraicæ t ramorum nexum repræsentat, nihil aliud nisi superficiem F_p normalem BOLYAIanam $2p+1$-pliciter connexam, quæ R_p ipsi homœomorpha (non homœometrica) est, exsistere supponere possumus, ut quadrato elementi linearis ipsius F_p in universum non forma (3), sed generalis forma

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

solum induenda sit, quam ob rem, ut ill. POINCARÉ docuit, pro quantitate λ, ratio arearum infinite parvarum in EUCLIDEO z-plano et in superficie F_p sibi mutuo respondentium statuenda est, omnia autem cetera non mutentur.

3. Transformationis iteratæ methodus.

Hæc via ac ratio solum quatenus specialiter $p = 0$, $g_k = \infty$ et tremata $a_1, \ldots, a_r$ (quæ, cum $p = 0$ est, in EUCLIDEO z-plano sita sunt habenda) in circulo sunt, peracta est.*

Ex geometria investigationibus hoc paragrapho breviter indicatis sic inventum est.

Cum duæ varietates, quæ ex $2p+1$-pliciter connexis varietatibus in se ipsas redeuntibus r trematibus selectis ortæ sunt, semper homœomorphæ sint, tamen tum et tum solum sunt homœometricæ, si iis idem polygonum normale correspondet.

* Journal für Mathematik (Crelle), tom. CV, pag. 181—232, Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, tom. II, pars II (Lipsiæ, 1898), pag. 268—324; cf. POINCARÉ, Acta Mathematica, tom. IV, pag. 285—300.

VI.

APPLICATIONES.

Priusquam ad applicationes theoriarum generalium quas antea paucis indicavimus enumerandas iam transibimus, casus quosdam peculiares intueamur.

1. De isogrammate, quod ad æquationem inter duas variabiles algebraicam spectat.*

Quam investigationem incipimus ab eo casu, in quo polygonum normale est isogramma (vide pag. 33) generis p, casu $p=0$ triviali neglecto. Eæ res quas in paragraphis III. et IV. invenimus, docent:

a) Ubi isogramma Φ_p generis p datum est, omnes uniformes ipsius η functiones, quibus intra Φ_p rationalium functionum vis est, quæque in correspondentibus ipsius Φ_p coniugatorum laterum punctis eosdem valores assumunt, earum duabus

$$z=\varphi(\eta), \quad t=\psi(\eta),$$

inter quas æquatione algebraica

$$F(z, t)=0$$

generis p est relatio, via rationali exprimi possunt, isogrammaque simpliciter connexæ superficiei $\overline{R}_p$, quæ ex superficie RIEMANNiana R_p, quæ ad æquationem $F(z, t)=0$ pertinet, sectionibus apte electis prodit, homœometricum est.

b) Si vice versa, æquatio algebraica $F(z, t)=0$ generis p, sive

* POINCARÉ, Acta Mathematica, tom. I, pag. 254 squ.; KLEIN, Mathem. Annalen, tom. XXI, pag. 141 squ.; SCHWARZ, Commentationes mathem. coll., tom. II (Berolini 1890) pag. 363 squ.

eius superficies RIEMANNiana data est, hæc superficies sectionibus C_k, D_k apte electis in simpliciter connexam $\overline{R}_p$ verti potest, quæ semper isogrammati Φ_p generis p homœometrica est. Planum P, in quo hoc isogramma exsistit, tantum si $p = 1$ est, EUCLIDEUM, si $p > 1$ est semper BOLYAIanum planum est. Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ plani P canonicæ coordinatæ sunt, z, t sunt uniformes et automorphæ ipsius $\eta = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sqrt{-1}$ functiones atque, si $p = 1$ est, biperiodicæ, sin autem $p > 1$ est, FUCHSianæ, quæ functiones nisi ad eos η valores, quibus realia plani P puncta correspondent, non exsistunt.

Primæ et secundæ speciei etiam integralia, quæ ad æquationem $F(z, t) = 0$ pertinent, sunt uniformia in η et cum η substitutionem translationum coniunctionis G, quæ isogrammatis Φ_p est, subit, tale integrale periodicitatis modulo augetur.

Via ac ratio indicata variabiles æquatione generis p coniunctas in casu, quo $p = 1$ est, in forma nota uniformium et biperiodicarum integralis primæ speciei functionum sistit, quam ob rem harum variabilium repræsentationem, quam eadem via ac ratione, si $p > 1$ est, functionum FUCHSianarum ope adipiscimur, pro genuina repræsentationis, si $p = 1$ est, notæ generalisatione habere possumus.

c) Si $G(z_1, t_1) = 0$ æquationem denotat, quæ ex æquatione $F(z, t) = 0$ birationali via transformata prodit, ita, ut una cum $F(z, t) = 0$ eiusdem classis sit, ut ill. RIEMANN sensit, isogramma Φ_r ad utramque æquationem idem est et e contrario, duæ æquationes, quibus idem isogramma correspondet birationali transformatione altera in alteram mutari possunt, ut ea data, quibus isogramma definitur, sint classis invariantes. Cum isogramma generis p, si $p > 1$ est, a $6p - 6$ realibus id est a $3p - 3$ complexis parametris quibus definitur dependeat, hic parametri, qui ab illo. RIEMANN dicuntur classis moduli, cogitari possunt. Si $p = 1$ est, unum habemus modulum, periodorum rationem τ (cf. Nr. III.).

Quibus ex geometria perlustratis, duas superficies RIEMANNianas $2p+1$-pliciter connexas sive, ut magis in universum loquamur, $2p+1$-pliciter connexas varietates duarum dimensionum in se ipsas redeuntes tum et tum solum homœometricas esse, si iis idem isogramma correspondet, numerumque condicionum, quibus satisfaciendum sit, $6p-6$ esse (si $p>1$), et homœometricas superficies RIEMANNianas sive varietates in se ipsas redeuntes semper birationali transformatione aliam in aliam transduci posse dicimus.

Isogrammate, quod ad algebraicam æquationem duarum variabilium pertinet, classis modulos maxime illustrari videmus. Quæ cogitandi ratio quos fructus algebraicarum functionum theoriæ produxerit ut cognoscatur, sufficiat monstrare illum. POINCARÉ primum isogrammatis ope hoc theorema subtiliter probavisse,* æquationem algebraicam, cuius genus $p>1$ est, finito birationalium transformationum numero solo in se ipsum transferri posse; unde iam sequitur hoc theorema: æquationem differentialem primi ordinis ramificationis puncta fixa habentem, semper algebraicis operationibus integrari posse, si algebraicæ relationis inter dependentem variabilem et eius derivatam genus est maius unitate.

Birationales transformationes eæ, quibus adhibitis algebraica æquatio $F(z, t)=0$ in se ipsam redditur, isogrammatis qualitatibus morphologicis plane illustrantur; e. g. æquatio hyperelliptica breviter ea re describitur, quod $2p$ hyperbolicarum (tum solum parabolicarum, si $p=1$ est) substitutionum, quibus latera isogrammatis congruentia ad se transferuntur, axis uno puncto secantur.**

* Acta Mathematica, tom. VII, pag. 1 squ.

** STOUFF, Theses (Parisiis, 1888) pag. 45.

Præterea applicationes ad ABELianarum integralium theoriam clar. HUMBERT docuit.*

2. De principio, quod ill. POINCARÉ proposuit.**

Si $y_1, \ldots, y_m$ monogenearum complexæ variabilis z functionum systema denotat, quæ functiones ad puncta omnia RIEMANNianæ superficiei R_p, quæ ad æquationem algebraicam

$$F(z, t) = 0$$

pertinet, finito numero singularium punctorum

$$z = a_k, \quad t = b_k \qquad (k=1, 2, \ldots, r)$$

excepto, uniformes sunt, horum singularium punctorum cuique integer numerus g_k hunc in modum assignetur. Si functionum $y_1, \ldots, y_n$ eorum ramorum, qui puncto (a_k, b_k) nexum habent, numerus finitus est, g_k huic numero æqualis eligatur, aliter sit $g_k = \infty$. Si superficiem R_p in locis (a_k, b_k) trematibus affectum esse, numero g_k autem correspondente tremati cuique assignato polygonum normale $\Phi_{r,p}$, quod simpliciter connexæ superficiei $\overline{R}_{r,p}$ homœometricum sit, delineatum esse fingimus, ut $y_1, \ldots, y_n$, ita z et t ipsa functiones ipsius $\eta = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sqrt{-1}$ uniformes apparent, si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ coordinatas canonicas in plano, quod polygonum $\Phi_{r,p}$ contineat, designant, ita ut functionalis relatio inter $y_1, \ldots, y_n$ et (z, t) variabili η auxiliaria introducta uniformetur. Hæc cogitandi ratio POINCAREianum principium appellatur. E. g. $y_1, \ldots, y_n$ homogeneæ et linearis æquationis differentialis n-ti ordinis systematis fundamentalis elementa denotare fieri possunt, cuius coëfficientes sunt rationales ipsorum (z, t) functiones.

Tum ad ipsorum p, r, g_k valorum systemata, quæ casibus 5.—10.,

* Journal de Mathématiques (Liouville), series IV, tom. III, pag. 327—404.

** Acta Mathematica, tom. IV, pag. 277 squ.

Nr. III. correspondent, æquatio differentialis linearis, de qua agitur, talis est, ut auxiliaria variabili η introducta eius coëfficientes uniformes et biperiodicæ ipsius η functiones fiant. Quam ob rem nota ratio ac via æquationem differentialem LAMÉianam et magis in universum æquationem differentialem quæ dicitur PICARDiana integrandi, specialis casus in generalem rationem supra indicatam, linearem æquationem differentialem algebraicos coëfficientes habentem integrandi continetur.

Sit data homogenea et linearis differentialis æquatio n-ti ordinis

$$(A) \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

coëfficientes in z rationales habens, quæ classis FUCHSianæ est cuiusque integralia in EUCLIDEI z-plani punctis $a_1, \ldots, a_r$ nexum dant et porro $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ æquationum fundamentalium et determinantium, punctis $z = a_k$ correspondentium, radices sint. Si omnia $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ sunt rationales numeri et in integralibus circum a_k explicandis logarithmi non apparent, numerus g_k generali denominatori ipsorum $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ æqualis, in omnibus ceteris casibus autem infinite magnus est eligendus. Normali polygono $\Phi_{r,0}$ signaturam $(0, r, g_1, \ldots, g_r)$ habenti, quod z-plano sectionibus

$$(a_1, a_r), \ldots, (a_{r-1}, a_r)$$

apte electis in simpliciter connexam superficiem $F_{r,0}$ mutato ac trematibus $a_1, \ldots, a_r$ numeris $g_1, \ldots, g_r$ instructo homœometricum est, quod itaque in hoc casu ruta sit, delineato, $\eta = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sqrt{-1}$, ubi $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ canonicæ plani polygonum $\Phi_{r,0}$ continentis coordinatæ sunt, variabilem independentem introducimus, unde sequitur, ut z uniformis et automorpha ipsius η functio fiat et elementa æquationis (A) systematis

fundamentalis $y_1, \ldots, y_n$ simul in uniformes ipsius η functiones

$$y_k = \psi_k(\eta) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

mutentur, quæ sunt tales ut, si η translationum coniunctionis G, quæ polygono $\Phi_{r,0}$ definitur, substitutionem S_ν subit, functiones $y_1, \ldots, y_n$ æquationis differentialis (A) monodromiæ coniunctionis Θ homogeneam et linearem substitutionem T_ν subeant. Quæ uniformes functiones $\psi_k(\eta)$, quas ill. POINCARÉ Zeta-FUCHSianas appellavit, si polygonum $\Phi_{r,0}$ in BOLYAIano plano exsistit et si $r_{k1}, \ldots, r_{kn}$ cuncta realia sunt, seriebus

$$(B) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_k(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

serie quadam Theta-FUCHSiana divisis exprimi possunt,* ubi $H_1, \ldots, H_n$ rationales ipsius η functiones denotant et m positivus et integer numerus satis magnus est. Series (B) convergentes esse ill. POINCARÉ, qui has series Zeta-FUCHSianas appellavit, considerationibus, quæ in plano BOLYAIano metiendo nituntur, adhibitis probavit.**

3. De problemate RIEMANNiano ad linearium æquationum differentialium theoriam proposito.

Functiones Zeta-FUCHSianæ in casibus quibusdam præsto sunt ad solvendam quæstionem ex quæ ill. RIEMANN in fragmento postumo*** linearium æquationum differentialium theoriam ædificare conatus est, quamquam eam solvi posse non probavit. Ex hac quæstione systema complexæ variabilis z functionum, quæ præscriptis quibusdam singularibus punctis $a_1, \ldots, a_r$ exceptis undique uniformes, finitæ, continuæ sunt, in punctis ipsis autem haud indefinitæ fiunt ac simul

* POINCARÉ, Acta Mathematica, tom. V, pag. 257.

** l. c. pag. 233—235, 259—264.

*** Opera mathematica (Lipsiæ, 1890) pag. 379 squ.

præscriptas homogeneas lineares substitutiones $A_1, \ldots, A_{r-1}$ variabili z sectiones $(a_1, a_r), \ldots, (a_{r-1}, a_r)$ directione positiva servata semel transgressa subeunt, indicetur. Serierum Zeta-Fuchsianarum ope hoc problema solvi posse auctor ea condicione probavit,* si substitutionum $A_1, \ldots, A_{r-1}$ et

$$A_r = A_1^{-1} \ldots A_{r-1}^{-1}$$

æquationum fundamentalium radicum valor absolutus unitati æqualis est.

Scriptum æstate anni MDCCCCII.

* Cf. Journal für Mathematik (Crelle), tom. 123, pag. 138 squ.

INDEX.

DE EA MECHANICÆ ANALYTICÆ PARTE QUÆ AD VARIETATES COMPLURIUM DIMENSIONUM SPECTAT

AUCTORE

PAULO STÄCKEL

PHILOSOPHIÆ DOCTORE, PROFESSORE PUBLICO ORDINARIO IN UNIVERSITATE KILONIENSE,
ACADEMIÆ LITTERARUM HUNGARICÆ SOCIO EXTRANEO,
ACADEMIÆ GERMANICÆ IMPERIALIS LEOPOLDINO-CAROLINÆ NATURÆ CURIOSORUM SODALIS,
SOCIETATIS MATHEMATICÆ MOSCOVIENSIS MEMBRUM HONORARIUM

Acutissimi illi mathematici, BOLYAI pater et filius et LOBATSCHEFSKIJ, a quibus geometria ab undecimo axiomate EUCLIDEO non dependens stabilita est, quamquam eæ rationes, a quibus exorsi sunt, et methodi, quibus utebantur, geometricæ erant, geometriæ systemate mutato mechanicam analyticam quoque, quin etiam totam physicam mathematicam novis rationibus accommodandas esse iam perspexerunt.

LOBATSCHEFSKIJ in opere, quod inscribitur: Geometriæ prima elementa (1829), cum paucis indicavit, quantum geometria imaginaria ad mechanicam analyticam valeat, tum quæstionem movit, utrum ex parallaxibus stellarum fixarum axioma EUCLIDEUM de lineis parallelis verum esse necne diiudicari possit, et astronomorum mensuras, quatenus eorum observationes accuratæ esse possent, a geometria EUCLIDEA nihil abhorrere invenit. Nuper (1900) SCHWARZSCHILD, vir clarissimus, hanc rem distributionem stellarum fixarum respiciens tetigit; idem astronomos non habere, quod geometriæ EUCLIDEæ, ut cum SCHWEIKARTO (1818) dicam, geometriam astralem anteponerent, demonstravit.

Item WOLFGANGUS BOLYAI rationes astronomicas adhibuit, cum in opere Generalis conspectus geometriæ, quo Tentaminis primus tomus (1832) finitur, hunc in modum dicit: «Aliud est si res non a priori sed quoad praxim consideretur et, pro data $\mathfrak{ab}$, rectæ $\mathfrak{ac}$, donec adhuc secet rectam $\mathfrak{bd}$, angulus a posteriori mensuretur:

nempe tum saltem a posteriori constabit u a recto, pro tantis lineis quas nobis tentare licet, haud multum differre. Sed quid si ab usque ad Sirium protenderetur, aut ulterius? Utcunque sit, tempus ab æterno connata spatii soror, ei auxilio venit, et quum motus corporum cœlestium calculis $u = R$ posito innixis conveniant, pro omni mensurationum nostrarum sphæra, in praxi eidem suppositioni tuto conquiescere monet.»

In opere, quod inscribitur Scientia spatii absolute vera (1832), Ioannes Bolyai, Wolfgangi filius, ad cuius diem natalem centenarium celebrandum hic libellus scriptus est, eam quæstionem neglexit. Idem in commentatione Germanice scripta, quam 1835 ortam esse putamus quæque recenti tempore inter scripta, quæ reliquit, inventa est, geometria absoluta adhibita mechanicam quoque constitui posse docuit. Quam rem amplius tractavit, ubi de opere Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, quod Lobatschefskij 1840 edidit, iudicium fert, de quo iudicio paulo ante Kürschák, vir clarissimus, et ipse quoque rettulimus. Cum mensuris terrestribus, ut ait Bolyai, fieri non possit, ut inter geometriam Euclideam et absolutam diiudicetur, differentia utendum esse, quæ in calculis oriatur, si planetarum loci primo ea conditione ad calculos vocentur, ut trianguli angulorum summa duos rectos efficiat et duorum corporum vis attractiva reciproca proportione esse ponatur superficiei sphæricæ, cuius radius duorum corporum cœlestium distantiæ æqualis sit, porro si deinde calculi angulorum summa magis magisque a duobus rectis discedente repetantur. Quodsi in differentia quadam planetarum motus cum motu calculis effecto convenire desinat, crescente autem differentia abhorrere non desinat, iure ac merito angulorum summam minus quam poneretur a duobus rectis differre concludi posse.

Iucundum est cognoscere planetæ motum circa corpus centrale a KILLINGIO, viro clarissimo, qui eandem attractionis legem atque IOANNES BOLYAI posuit, tractatum esse (1885); qui probavit motum ut in spatio EUCLIDEO lege NEWTONiana posita ita in spatio absoluto curvis secundi ordinis contineri et ad normam legum legibus KEPLERianis similium dirigi. Eadem attractionis lege, quam IOANNEM BOLYAI invenisse valde admirandum est, ei mathematici usi sunt, qui de theoria functionis potentialis ad spatium absolutum extensæ scripserunt; quam rem postea pluribus verbis tractabimus.

Multum tempus consumptum esse, priusquam ea, quæ LOBATSCHEFSKIJ et IOANNES BOLYAI de geometriæ principiis invenerant, a mathematicis comprobarentur, constat. Quam ob rem etiam plus temporis intercessisse, priusquam geometræ varietatum, quæ compluribus dimensionibus fruuntur, mechanicam attingere auderent, mirum non est. Tamen non sine causa LIPSCHITZ, vir illustrissimus, dixit (1873), eiusmodi disquisitiones revera satis antiquas esse, quippe quarum principia Mechanica analytica, cuius auctor LAGRANGE (1788) sit, iam contineri videantur. Constat enim magna pars mechanicæ analyticæ, eaque quæ permagni momenti est, in eis motibus investigandis, in quibus positio systematis corporum valoribus variabilium quarumdam independentium definitur, quarum numerus finitus est. Ut eiusmodi systematis motus ad æquationes differentiales revocetur, viris vivæ et laboris virtualis expressiones formari satis esse LAGRANGE demonstravit. Qui labor virtualis est variabilium illarum forma differentialis linearis, cuius coefficientes significant vires generalissimo sensu acceptas; illa vis est forma differentialis quadratica quadrato temporis differentialis duplici divisa. Quæ forma differentialis quadratica cum elementi linearis quadratum haberi possit varietatis cuiusdam tot dimensiones habentis, quot variabiles sunt,

sive, ut geometrarum anglicorum more dici solet, dimensionum numerum parem libertatibus systematis, adducimur, ut statuamus systematis motum, quem modo contemplati sumus, æquivalentem esse motui puncti singularis, quod in spatio complurium dimensionum vagatur operantibus viribus, quas laboris virtualis expressio producit. Quæ æquivalentia in eo consistit, quod æquationes differentiales, quibus motus puncti paret, eædem sunt atque æquationes differentiales, quibus motus systematis obtemperat.

Quæ dixi ut exemplis illustrem, problema trium corporum astronomicum problemati motus puncti singularis, quod in spatio novem dimensionum promovetur, æquivalens est. Porro gravidi turbinis sphærici motum æquivalentem esse motui puncti singularis, quod in spatio sphærico trium dimensionum idoneis viribus operantibus vagatur, F. KLEIN et SOMMERFELD, viri clarissimi, (1898) demonstraverunt. Si MAXWELLium (1873) et I. I. THOMSONem (1888), viros clarissimos, auctores secuti æquationes LAGRANGEianas parametris elasticis, electricis, magneticis, thermicis, chemicis adhibitis in omnibus physicæ mathematicæ generibus valere dicamus, eiusmodi æquivalentiarum numerus multo maior est; quam rationem probantes ad «mechanicorum modellorum» notionem, quam cum alii tum BOLTZMANN, vir clarissimus, stabiliverunt, perveniamus.

Aequationes differentiales, quas LAGRANGE proposuit, eo modo concipi posse, ut eis motus puncti in spatio complurium dimensionum vagantis dirigatur, iam docuit IACOBI in lectionibus, quas per sex menses anni 1842—43 habuit, quamquam in problematis peculiaribus substitit; quod eius meritum multis annis post innotuit, postquam CLEBSCH has lectiones anno 1866 edidit; quam rationem IACOBI a coordinatarum ellipticarum generalium notione profectus invenisse mihi videtur, quæ ab eo anno 1839 publici iuris facta erat. Neque

multum afuit, quin Liouville (1850, 1856) et Minding (1864) æquationes Lagrangeanas simili modo interpretarentur.

Postquam Beltrami (1869) varietatum, quæ compluribus dimensionibus fruuntur, lineas geodæticas simili ratione inveniri posse ostendit, qua in inveniendis lineis geodæticis superficierum curvarum geometræ usi erant, Lipschitz, vir acutissimus, anno 1872, quomodo pro motu systematis finiti libertatum gradus compotis considerari posset motus «puncti repræsentantis», quod operantibus viribus, quæ laboris virtualis expressione continentur, promovetur in varietate complurium dimensionum determinata viris vivæ expressione, exposuit. Disquisitiones, quas Beltrami et Lipschitz instituerant, a novis rationibus profectus et diversa addens Darboux, vir illustrissimus, anno 1889 denuo explicavit.

Quamquam quam fertilis esset hæc methodus, mathematici non ignorabant — id quod præcipue in problematum dynamicorum «æquivalentia analytica» disquirenda et in theoria «grupparum transformationum», cuius auctor est Sophus Lie, ad mechanicam abhibenda apparet, quod testantur disquisitiones a viro clarissimo Painlevé et a me ipso (1891—1897) institutæ — hæ rationes tamen a plurimis geometris non prius acceptæ sunt, quam Hertz opere Principien der Mechanik (1894) effecit, ut victrices evaderent.

Unicuique systematis configurationi punctum varietatis supra commemoratæ respondet. Quomodo autem systema, si hac configuratione dispositum est, se habeat describenti velocitates, quarum eius partes compotes sunt, novisse necesse est; quam ad rem cognoscendam variabilium independentium differentialia tempore differentiali effecta sive velocitatis coordinatas invenisse sat est. Sed commodum est pro his velocitatis coordinatis valores linearium quorundam aggregatorum indicari, quæ ex differentiatione viris vivæ

respectis velocitatis coordinatis prodeunt; quæ aggregata nuper impulsus coordinatæ appellata sunt. Itaque qui sit systematis habitus, qui et partium singularium situ et velocitate earum definitur, puncto varietatis, cuius numerus dimensionum duplo maior est numero libertatum, repræsentatur. Quod punctum repræsentans, quo POINCARÉ, vir illustrissimus, in problemate trium corporum disquirendo iam (1890) usus erat, etiam ad theoriam caloris mechanicam excolendam multum valuit, cui investigationi BOLTZMANNii, viri illustrissimi, vestigia secuti ZERMELO (1900) et J. W. GIBBS (1902), viri clarissimi, operam dederunt. Mentione etiam dignum est, eisdem æquationibus differentialibus, quæ inter situs et impulsus coordinatas sunt, fluidi incompressibilis, quod in illa varietate repræsentante continetur, motum dirigi; quæ res in operibus auctorum quas modo commemoravi insignem locum obtinet.

Neque vero de punctorum solum repræsentantium motibus disputatum est, sed etiam geometræ ea libertate, quam suo iure sibi vindicant, usi varietatum, quæ compluribus dimensionibus fruuntur, mechanicam dignam esse, quæ per se ipsa investigaretur, iudicaverunt.

A varietate igitur complurium dimensionum profecti, cuius elementum lineare radix quadratica formæ datæ quadraticæ differentialis est, primum puncti, quod in illa varietate operantibus viribus datis promovetur, motum investigaverunt; qui motus æquationibus differentialibus LAGRANGEanis dirigitur. Deinde exorta est quæstio, num etiam theoria motus systematum rigidorum seu solidorum, quam D'ALEMBERT et EULER stabiliverunt, ad varietates complurium dimensionum applicari posset; qua in re initio a cinematica capto ad staticam et cineticam progrediendum est. Sed exemplum superficierum curvarum docet, ad varietates complurium dimensionum, nisi condi-

tionibus quibusdam satisfaciunt, cinematicam systematum rigidorum non posse adhiberi; quibus conditionibus efficitur, ut systemata quædam rigida in illa varietate aut libere aut intra terminos aliquos moveri possint. Campus magnus disquisitionum pulcherrimarum patet geometris varietates contemplantibus, in quas cinematica quædam cadit. Quæ disquisitiones eo iucundiores sunt, quod theoriæ «grupparum transformationum» adhibendæ facultatem dant, quoniam varietates, de quibus agitur, eæ ipsæ sunt, quarum elementa linearia gruppis continuis transformationum in se ipsa mutantur. Mauricium Lévy, virum clarissimum (1878), cuius formularum non parva pars iam in commentatione invenitur, quam Massieu (1861) edidit, secuti recentibus temporibus viri clarissimi Cerruti (1895), Bianchi (1897), Ricci (1898), Cotton (1899), Bemporand (1899), Davisson (1900), Levi-Civita una cum Ricci (1901) hanc rem ita tractaverunt, ut disquisitio varietatum trium dimensionum, quæ quidem ad reales variabiles pertineat, perfecta esse videatur.

Insignem in cinematica systematum rigidorum locum obtinent varietates, quæ constanti curvaturæ mensura fruuntur, cum in eis systemata quælibet rigida libere promoveri possint; qua proprietate varietates illas definiri ex disquisitionibus apparet, quas Helmholtz (1866, 1868) et Sophus Lie (1886, 1893) instituerunt. Hinc explicari mihi videtur, quod usque ad hunc diem geometræ in disquirendis motibus systematum rigidorum, quæ varietatibus curvatura constanti fruentibus continentur, omne studium posuerunt; varietatum enim Euclidearum curvatura, quippe quæ evanescat, constans haberi debet. De quibus disquisitionibus infra fusius agendum erit.

Postquam exposuimus, quæ varietatum compluribus dimensionibus fruentium mechanica sit, quæstiones singulæ, quibus geometræ operam dederunt, tractandæ sunt. Atque primum de eis disquisitionibus aga-

tur, quæ ad motum puncti singularis vel complurium punctorum, deinde de eis, quæ ad motum systematum rigidorum pertinent. Cum illic varietatum, in quibus puncta vagantur, natura admodum varia sit, hic nullæ varietates nisi curvatura constanti fruentes adhuc a geometris disceptatæ sunt. Appendicis loco nonnullæ disquisitiones enumerentur, quæ ad systematum deformabilium theoriam spectant.

Quæstionem de motu puncti propositam, quod e centro fixo ea vi attrahitur, quæ distantiæ centralis functio est, BINET (1837) a tribus ad quemlibet dimensionum numerum extendit; quam rem vir clarissimus COMBESCURE (1881) ipse quoque tetigit. Tum SCHERING (1873) quæsivit, quomodo res se habeat, si vis non solum a distantia centrali, sed etiam a puncti velocitate dependeat, atque EBERT, vir clarissimus, (1902) de motu complurium punctorum se invicem attrahentium disseruit. Planetarum orbitas in spatiis curvaturæ constantis vagantium viri illustrissimi LIPSCHITZ (1873), CAYLEY (1873), KILLING (1885) contemplati sunt atque PHRAGMÉN, vir clarissimus, (1890) theoremata quædam a clarissimo viro POINCARÉ de trium corporum invicem attrahentium motu in spatio EUCLIDEO proposita eadem via persecutus est. Alias quasdam quæstiones de motu puncti in varietate curvaturæ constantis promoti DA FRANCESCO (1898) tractavit, qui mechanicæ elementaris cursum ad hoc genus mechanicæ generalis transferre conatus est.

Ad motum in spatio EUCLIDEO complurium dimensionum disquirendum non sine fructu adhibentur coordinatæ ellipticæ generales, quarum theoriam IACOBI (1839) explicavit; quas adhibentes sæpe ad integrationem æquationis differentialis HAMILTONianæ pervenimus, quippe quæ eo modo variabilibus separatis ad quadraturas reducatur. Quam rationem HÆDENKAMP (1841), SCHLÆFLI (1852), ROSOCHATIUS (1877), RUDIO, vir clarissimus, (1898) accuratius persecuti sunt. Ele-

mentorum linearium formas generaliores, quarum ope integratio varriabilibus separatis effici possit, LIOUVILLE (1849) et auctor (1891) indicaverunt. Neque silentio prætereundus videtur vir clarissimus DARBOUX, qui 1898 in spatio EUCLIDEO complurium dimensionum pro superficiebus secundi ordinis confocalibus, quæ coordinatas ellipticas præbent, cyclides confocales adhibuit. A disquisitionibus, quas WEIERSTRASS (1866) et vir clarissimus STAUDE (1887) instituerant, profectus equidem (1891, 1900) investigavi, quomodo in classe problematum dynamicorum a me anno 1891 detecta variabiles a tempore dependeant. Qua in re functiones quædam complurium variabilium exstiterunt compluribus periodis fruentes, quarum theoriam AHRENS, vir clarissimus, (1895) fusius explicavit. Denique PAINLEVÉ, vir illustrissimus, (1894) theoremata nonnulla generalia proposuit, quibus motus puncti intra varietatem complurium dimensionum vagantis accurate describitur. Magna copia extat disquisitionum ad formas quadraticas differentiales pertinentium, quas problematis dynamicis tractandis adhiberi posse apparet; quæ tamen, cum mere analyticæ sint, hoc loco prætermittendæ videntur.

Iam vero de mechanica systematum rigidorum dicendum est, qua in re primum cinematicam et staticam, deinde theoriam functionis potentialis, denique cineticam tractabimus atque ita, ut per totam hanc tripertitam quæstionem primum spatia EUDLIDEa complurium dimensionum, tum spatia constanti curvaturæ mensura fruentia consideremus.

Cinematica excolenda a geometria ad dynamicam viam aperit. Quam enim arte cinematica cum geometria cohæreat, cum ex aliis rationibus tum inde cognoscitur, quod theoria EUCLIDEa linearum curvarum duplicis curvaturæ contemplationum cinematicarum ope dilucide explicatur. Quam viam HOPPE (1880), BRUNEL (1881), PIRON-

DINI (1890), LANDSBERG (1897), PICCIOLI (1898), LOVETT (1900), HARDY (1902) ad lineas curvas, quæ spatiis EUCLIDEis complurium dimensionum continentur, transtulerunt. Et eadem ratio cadit in superficierum curvarum proprietates. Qua in re mirum non est «methodum cinematicam», qua imprimis DARBOUX, vir illustrissimus, (1887) spatium EUCLIDEum trium dimensionum considerans usus erat, a viris clarissimis CRAIG (1898) et HATZIDAKKIS (1900) spatiis complurium dimensionum adhibitam esse. Neque prætereundum est virum illustrissimum LIPSCHITZ (1876) curvaturæ theoriam eo modo extendisse, ut relatione uteretur, quæ inter radium curvaturæ atque pressum normalem puncti in linea vel superficie aliqua mobilis exsistit.

De cinematica corporis solidi, quod in spatio EUCLIDEO complurium dimensionum promovetur, multi auctores egerunt. Ex quibus primum fortasse EULERUM (1770) nominaverim, quem formulas quasdam, quibus coordinatarum CARTESIanarum systematis transformatio dirigitur, ad quatuor vel plures dimensiones extendisse in commentatione anno 1849 scripta, anno autem 1884 a viro clarissimo KORTUM edita ostendit IACOBI. Cuius vestigiis, ut videtur, insistens, SCHLÆFLI (1859, 1866) huic rei operam dedit. Nuper de legibus, secundum quas corpus solidum in spatio EUCLIDEO quattuor dimensionum promovetur, scripserunt viri illustrissimi JORDAN (1875), COLE (1890), GOODWIN (1899), JAHNKE (1902). Easdem leges in spatio quinque dimensionum CANNIZZO (1896), in spatio n dimensionum JORDAN (1875), LIPSCHITZ (1880, 1886, 1896, 1900), SCHEEFFER (1880), KOX (1881), SCHOUTE (1891), STUDY (1891), VAHLEN (1897, 1902), JOLY (1898), WHITEHEAD (1898) persecuti sunt. Mentione etiam dignum est has disquisitiones arte cum numerorum complexorum theoria sublimiore cohærere.

Contra statica spatiorum EUCLIDEOrum complurium dimensionum

neglecta est, nisi quod SCHOUTE, vir clarissimus, (1902) memorandus videtur, qui in systematis virium reducendis versatus theoremata nota, quorum auctores sunt CHASLES et MŒBIUS, ad complures dimensiones extendit.

Prorsus aliter res se habet in spatiis curvatura constanti fruentibus, quo in genere a statica ordiri idoneum mihi videtur.

DAVIET DE FONCENEX (1762) quomodo vires, quibus corpus rigidum tangitur, componendæ sint, a simplicissimis compositionis proprietatibus profectus exponere conatus est. Quanta sit vis resultans duarum virium, quibus eadem intensitas insit quarumque directiones eodem plano contineantur atque eædem lineæ rectæ normales sint, æquatione quadam definitur functionali, cui satisfit, cum functio determinanda magnitudini constanti æqualis ponitur; qua re ad principium vectis ARCHIMEDEum pervenitur. Cui æquationi functionali etiam satisfieri, cum functio expressioni æqualis ponitur, quæ ex functionibus exponentialibus constat, D'ALEMBERT (1773) et LAPLACE (1799) animadverterunt; quam solutionem qui accipiat, eum ad geometriam absolutam deduci necesse esse GENOCCHI (1869) demonstravit. Cum autem geometria absoluta posita eadem lex virium componendarum adhibenda sit, sequitur ut et axioma undecimum EUCLIDEum et principium vectis ARCHIMEDEum æquo iure aut accipienda aut reicienda sint. At ratio vires, quarum directiones sese intersecant, componendi virium parallelogrammate conservato valet sive accipias sive spernas axioma parallelarum, dummodo constructiones in campo infinite parvo efficiantur; atque simili modo laboris virtualis principium ab axiomate parallelarum non dependet. Quam rem viri clarissimi GENOCCHI (1869), LINDEMANN (1873), ANDRADE (1897), DA FRANCESCO (1899) tractaverunt.

Systema virium, quibus corpus solidum tangitur, mechanica EUCLI-

DEa valente semper reducitur ad vim singularem, quæ ex puncto arbitrario operatur, et par virium, quod viri singulari æquivalet infinite parvæ, quæ continetur plano in infinitum remoto. Cui de systematis virium reducendis doctrinæ doctrina de motibus corporis rigidi infinite parvis componendis respondet, quos motus semper ad rotationem circum axem per punctum arbitrarium transeuntem et translationem singularem reduci posse constat. Qua in re cum lineis rectis, per quas vires operantur, rotationum axes tum viribus, quæ continentur plano in infinitum remoto, translationes respondent; quo efficitur, ut statica et cinematica corporis rigidi dualitatis relationem habeant. Iam illud adhibendo, quod KLEIN, vir illustrissimus, (1871) docuit, geometriam absolutam et theoriam mensurarum proiectivam a clarissimo viro CAYLEY (1859) constitutam inter se cohærere — eo autem cohærent, quod pro motibus spatii absoluti transformationes proiectivas ponere licet, quibus superficies secundi ordinis absoluta non mutatur — eo pervenimus, ut spatio curvaturæ constantis posito theoriam motuum corporis rigidi infinite parvorum una cum theoria compositionis virium infinite parvarum, quibus corpus solidum tangitur, admiranda quadam facilitate stabiliamus. Qua in re contemplanda cognoscitur, in mechanica absoluta differentiam et inter rotationes atque translationes et inter vires singulares atque paria virium tollita, ut sex coordinatarum, quæ sunt et motus infinite parvi et, ut cum PLÜCKERIO dicam, dynameos infinite parvæ, unaquæque ceteras quinque æquiperet et idem ius habeat. Perinde, ut hoc præcipiam, in corporis rigidi cinetica absoluta pro tribus theorematis, quæ sunt de motu centri gravitatis, et pro tribus theorematis, quæ sunt de summa arearum descriptarum, sex theoremata se æquiperantia idemque ius habentia stabiliuntur. Et cum in mechanica EUCLIDEa sæpe fiat, ut et translationes et rotationes separatim disquirantur, in mechanica abso-

luta ista separatio nunquam fieri potest. Cuius rei auctores nominentur viri clarissimi LINDEMANN (1873), D'OVIDIO (1873), STAHL (1873), RICORDI (1882), HEATH (1884), SEGRE (1885), F. KLEIN (1873, 1890), BURNSIDE (1895), SEILIGER (1897).

Geometræ mechanicam EUCLIDEam exsequentes theoriam stabiliverunt, qua cum motus corporis rigidi infinite parvi tum dynames corpus tangentes quantitatum simplicium neque in partes divisibilium locum obtinent, dico theoriam cochlearem, quam BALL, vir clarissimus, (1880—1890) constituit, ad umbilicum duxit nuper (1902) STUDY, vir clarissimus. Quæ theoria cum in mechanica EUCLIDEa sæpe utilis sit, in mechanica absoluta non modo semper idonea, sed etiam prorsus necessaria est. Suo igitur iure geometræ in theoria cochleari ad spatia curvaturæ constantis transferenda magnam operam sumpserunt. Præter huius theoriæ auctorem ipsum, cuius disquisitiones GRAVELIUS (1889) pluribus verbis exposuit, in hoc genere viri clarissimi nominandi sunt CLIFFORD (1876), BUCHHEIM (1884), HEATH (1884), KOTELNIKOFF (1895, 1899), BURNSIDE (1889), STUDY (1900, 1902).

Theoriam functionis potentialis in spatiis complurium dimensionum EUCLIDEis valere iam GREEN (1833, 1835) animadvertit, qui præcipue potentialem ellipsoidis generalis tractavit. Quam rationem SCHLÆFLI commentatione annis 1850—1852 confecta, anno 1901 autem ex scriptis postumis edita accuratius perspexit, qui ellipsoidis generalis et massa impletæ et per superficiem massa constratæ functionem potentialem contemplatus est. Post GREENium primus C. NEUMANN (1867) disquisitiones de potentiali generali publici iuris fecit. Eum KRONECKER (1869) secutus est, qui annis 1881 et 1891 ad eandem rem rediens ellipsoidis generalis functionem potentialem formula elegantissima expressit. Deinceps de theoria generali potentialis scripserunt viri clarissimi BELTRAMI (1869), BETTI (1871), TONELLI

(1875, 1882), Cayley (1876), Gundelfinger (1878), Macher (1878), Gutzmer (1890, 1893), Schütz (1895), Dyck (1898), Poincaré (1898). Casus peculiares tractaverunt Hoppe (1880), nempe sphæram, Hobson (1896), nempe pateras ellipsoidicas et discos, Dixon (1897), nempe corpora in anulorum speciem formata, Wirtinger (1897), nempe corpora, quorum superficies varietatibus sphæricis constant.

Vir illustrissimus Lipschitz (1872) rettulit, mathematicum acutissimum Dirichlet iam anno 1852 theoriæ potentialis ad spatium hyperbolicum transferendæ operam dedisse; quem a viro summo Gaussio instigatum esse putaverim. Postea et Schering (1873) et qui eius scholis interfuerunt viri clarissimi Fresdorf (1873), Tonelli (1875), Opitz (1881) de ea re egerunt. Quantæ difficultates obstent theoriæ potentiali extendendæ ad spatia curvatura constanti positiva fruentia vir illustrissimus F. Klein (1891) docuit. In spatiis sphæricis enim omni massæ attrahenti eadem massa respuens in puncto averso respondet; id quod quamvis mirum tamen non absurdum est. At in spatiis ellipticis functionis potentialis elementum duobus valoribus frui necesse est; id quod a mechanicæ principiis omnino abhorrere perspicuum est.

Corporum rigidorum cineticæ massarum geometria quæ dicitur præmitti solet, in qua de inertiæ axibus principalibus atque de inertiæ et deviationis momentis principalibus investigandis agitur. Quod spatia elliptica attinet, Clifford (1874) ab imagine imaginaria, quam Hesse adumbravit, profectus axium inertiæ theoriam explicavit. In geometria enim Euclidea tetraedrum polare imaginis imaginariæ et circuli sphærici imaginarii in infinitum remoti tribus in campo finito sitis fruitur aciebus, ut hoc vocabulo significem lineas rectas binarum hedrarum communes. Quæ acies tres axes inertiæ principales exhibent, cum ceteræ tres acies plano in infinitum remoto

continineantur. Quoniam vero in spatio elliptico pro circulo imaginario exstet superficies secundi ordinis absoluta, tetraedrum polare huius superficiei et imaginis imaginariæ sex axes inertiæ principales exhibet. De momentis et inertiæ et deviationis haud multi auctores, viri clarissimi KILLING (1885), HOPPE (1887), S. KANTOR (1896), egerunt.

Corporis rigidi rotationem circa punctum fixum, si spatium EUCLIDEUM complurium dimensionum ponatur, iam CAYLEY (1846) tetigit, qui qua ratione æquationes differentiales motum dirigentes inveniantur breviter perstrinxit. Quarum æquationum formulas accuratas FRAHM (1873) indagavit. Idem æquationes quasdam integrales, quæ corpore sine virium externarum ope promoto valent, detexit et intra numerum quattuor dimensionum consistens, dummodo constantes problemati propriæ relationes quasdam habeant, integrationem solis quadraturis effici posse statuit. Tum CLIFFORD (1876) corpore sine virium externarum ope promoto æquationes differentiales integrare conatus est functionibus illis celeberrimis, quæ litera theta significantur, cum argumenta functionibus linearibus temporis æqualia ponantur. Sed KILLING, vir clarissimus, (1885) demonstravit, hanc solutionem peculiarem esse neque ubique valere, quippe quæ non satis magnum numerum constantium arbitrariarum præbeat. Denique SCHOTTKY, vir clarissimus, (1891) pro casu quattuor dimensionum solutionem generalem quadraturis expressit.

De rotatione corporis rigidi in spatio curvaturæ constantis positivæ promoti primus CLIFFORD (1874) disseruit, æquationes differentiales inveniens, quibus motus corporis obtemperat. Paulo post (1876) BELTRAMI demonstravit æquationes illas ad formam EULERianis æquationibus similem redigi posse. Tum HEATH (1884) rotationem corporis solidi sine virium externarum ope promoti in spatio trium dimen-

sionum contemplatus integrationem functionibus efficere conatus est, quæ littera theta significantur; quod, cum iusto minorem numerum constantium arbitrariarum invenerit, ei minus prospere successit. Denique VOLTERRÆ, viri clarissimi, vestigia secutus vir clarissimus DA FRANCESCO (1900), quomodo hæc quæstio quadraturis solvi possit, indicavit.

Ut finem faciam, vir clarissimus F. KLEIN (1897) motum nullis viribus externis effectum corporis rigidi in spatio hyperbolico trium dimensionum vagantis ita determinavit, ut massarum distributionem peculiarem poneret. Motus quosdam viribus externis effectos DA FRANCESCO (1901) tractavit, qui conditiones invenit eis similes, quibus positis motum corporis gravidi in spatio EUCLIDEO considerantes LAGRANGE et SONJA KOWALEWSKI æquationes differentiales ad quadraturas reduxerant.

De corporum deformabilium mechanica appendicis loco nonnullas disquisitiones commemorare liceat. Quæ sit forma catenæ, quæ spatio curvaturæ constantis continetur, DA FRANCESCO (1900) ostendit. Aequationes, quibus æquilibrium corporis elastici isotropi definitur, BELTRAMI (1881) ea ratione constituit, ut in spatiis curvaturæ constantis valeant; quem secutus PADOVA (1889) theoriam, quæ a MAXWELLio nomen traxit, spatiis curvaturæ constantis adhibuit. Eidem rei viri clarissimi SOMIGLIANA (1888) et CESÀRO (1894, 1896) operam dederunt. Denique viri clarissimi SIEBERT (1883) et HILL (1884) quæstiones quasdam hydrodynamicas, quæ numerum dimensionum tertio maiorem habent, tractaverunt.

Omnia quæ in hac commentatione dicta sunt respicientes multos mathematicos eosque egregios studium ad eam mechanicæ partem, quæ ad varietates complurium dimensionum spectat, contulisse cognovimus. Quod, quæ est argumenti gravitas, mirandum non est.

Primum enim has disquisitiones bonæ frugis plurimum ad fines mechanicæ propagandos afferre patet. Deinde cum ceteris et geometriæ et analyseos partibus artius quam exspectaveris coniunctæ sunt, veluti cum numerorum complexorum theoria sublimiore, cum formis quadraticis differentialibus, cum theoria grupparum transformationum continuarum, cum geometria proiectiva, cum doctrina figurarum, quæ lineis rectis efficiuntur; quas theorias hac societate inita valde promotas esse nemo non videt. Denique, quod maximi momenti est, sæpe theoremata, quæ solam mechanicam EUCLIDEam consideranti prorsus discrepare videntur, mechanicam generaliorem respicienti ab eadem stirpe duci apparet. Quo fit, ut qui hanc ampliorem atque sublimiorem investigandi rationem sequatur, logicum conexum illum, quo mechanicæ leges inter se cohærent, penitus perspiciat.

Scripsi æstate anni MDCCCCII.

INDEX OPERUM AD GEOMETRIAM ABSOLUTAM SPECTANTIUM

CONFECTUS A

ROBERTO BONOLA

MATHEMATICÆ DOCTORE, NORMALIS SCHOLÆ MAGISTRO, DIFFERENTIALIS CALCULI PROFESSORIS ADIUTORE IN ATHENÆO TICINENSI.

INTRODUCTIO.

1. Cum in sollemnia natalicia sæcularia IOANNIS BOLYAI, viri illustrissimi, id quod mihi summo decori est, opera, quæ ad absolutam geometriam spectant, describerem, cum indicandi omnes res, quæ, quid de hoc argumento scriptum sit, sciscitanti necessariæ sunt, tum docendi, quomodo evoluta sit geometria absoluta sæculo undevicesimo, consilium secutus sum.

Quoniam autem in opere, quod inscribitur »Ueber die Theorie der Parallellinien« (cf. No. 167, partis alteræ), quodque STÄCKEL et ENGEL, virorum clarissimorum, cura editum est, index omnium operum, quæ ad geometriam absolutam pertinent usque ad annum MDCCCXXXVII plenus exsistit, ab hoc tempore initium capere idoneum mihi videtur.

Ab anno MDCCCXXXVII ad annum MDCCCLXVII non multa sunt opera, quæ in classes describam, quod vero postea annis insequentibus tam celeriter numero crescunt, RIEMANN, BELTRAMI, HELMHOLTZ, virorum illustrissimorum, libris maxime debetur, quibus geometriæ absolutæ studium excitatum est. Ut autem differentiam inter tempestatem, quæ ante et post annum MDCCCLXVIII est, magis perspicuam reddam, in explorandis datis, quæ pertinent ad describendos libros eos, qui ante illum annum scripti sunt, magnas difficultates me habuisse confiteor, ita, ut hic libellus indicem operum editorum generatim efficere, præcipue, quatenus de tempore MDCCCXXXVIII—LXVII agitur, supersedeat. Simili modo res se habet de annis MCMI,

MCMII, quia operis «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik», quo ex opere pleraque data hausi, ultimus tomus ea scripta, quæ anno MCM sunt edita, refert.

2. In libris describendis ea ratione usus sum, ut opera, quæ eodem anno prodierunt, in ordine litterarum, quibus nomina autorum incipiunt, pro singulis annis separatim enumerarem. Præterea signis appositis indicavi classes, quibus libri singuli, secundum methodos consiliaque componendi, assignari possunt.

Porro opera argumentis mathematicis ab operibus argumentis historicis, criticis, philosophicis segreganda esse mihi visum est. In duas autem partes, discernere ut facile intelligitur, non est consentaneum.

Denique cum paucas sive fere nullas quorumdam librorum indicationes, quæ ad eos attinent, colligere potuerim, dubium esse quin in libris describendis indiligentiæ futuræ sint, quas autem nullo modo effugere potui, negabo.

3. Eæ classes, ad quas opera mathematicis argumentis spectant, quarum supra mentionem feci, sunt sex, quarum investigandi via ac ratio quæque describitur atque definitur. Sex investigandi rationum sive partium nomina sunt hæc, quorum quodque instructum est eo signo, quod omnibus libris de ea confectis apposui:

Pars elementaris [E],
Pars metrico-differentialis [D],
Pars in qua de operationum coniunctionibus* agitur [G],
Pars proiectiva [P],
Pars metrico-finita [F],
Pars vectorialis [V].

* Conf. adnotationem, pag. 15.

Præterea libellorum, qui ad mechanicem et mathematicam physicam attinent, numerus quidam inseretur; eos signo [M] significavi.

Libris, qui cum eodem modo et eadem ratione sint, simul duabus partibus assignari possunt, signum duarum litterarum appositum est, iis autem, in quibus planius de argumento agitur, qui quid geometria absoluta produxerit, quibus methodis usa sit, exponunt, signum [C] apposui.

Locum Indicis posteriorem, ut supra dictum est, libri historici, critici, philosophici obtinent, qui quoque, ut ceteri, ordine anni cuiusque observato disponentur.

Qua præmissa re partes singulas paucis describere mihi liceat.

4. Pars elementaris [E]. Hæc est prima in genere historico, I. BOLYAI et LOBATSCHEFSKIJ, virorum illustrissimorum, libris, qui ex theoria parallelarum iudicata provenerunt, initium capit. Eorum methodus, quam complures geometræ secuti sunt, est synthetica ac elementaris.

5. Pars metrico-differentialis [D]. Hæc est altera in genere historico; ea, cuius auctor est RIEMANN (1854), spatii notionis studium ad varietatem n dimensiones habentem, quam formularum ope repræsentari posse notum est, reducit. Determinatio metrica nititur in notione elementi linearis, cuius quadratum forma quadratica ac homogenea in variabilium differentialibus exprimitur. Inter typos varietatis infinitos, quibus elementum lineare formam, quam modo nominavi, habens exprimi potest, præcipue peridonei sunt ii, in quibus mensuræ a positionibus, in quibus fiunt, independentes prodeunt, quam varietatem ill. RIEMANN ita definit, ut curvaturam in omnibus suis punctis constantem esse dicat. Prout curvaturæ valor zero, negativus, positivus, ita varietas EUCLIDEa aut varie-

tas, quæ nomen accepit a mathematicis BOLYAI et LOBATSCHEFSKIJ aut varietas RIEMANNiana, prodit.

6. Ea pars, in qua de coniunctionibus agitur. [G]. Ea, qua (1868) ill. HELMHOLTZ primus — quadam ex parte ante (1851) clar. UEBERWEG — usus est, ad spatii, quod formularum ope exprimi posse notum est, proprietates metricas functione duorum punctorum coordinatarum, quæ functio dicitur distantia, adhibita definiendum pertinet, et quæ in omnibus spatii motionibus inalterata manet, quibus transformationum, quæ componi et inverti possint, coniunctionem formari ill. LIE iudicat.

7. Pars proiectiva [P]. Deductione proprietatum metricarum ad graphicas, quam clar. LAGUERRE (1853) et clar. JAURE (1858) introduxerunt, principium, in quo metrica proiectiva, cuius auctor est ill. CAYLEY (1859) continetur, constituitur. — Geometria proiectiva, cum a mensuræ notione qualibet non dependeat (v. STAUDT, KLEIN, LÜROTH, ZEUTHEN, PASCH ceterique), producta, proprietates spatii metricæ superficie secundi ordinis fundamentali, quæ figura absoluta cogitatur, deducuntur. Quo in cogitationum ordine proprietates metricæ sunt universæ atque solæ proprietates figurarum graphicæ, quæ ad transformationum superficiei secundi ordinis in se ipsam proiectivarum coniunctionem non mutantur. — Prout figura absoluta est superficies secundi ordinis realis puncta elliptica habens, aut superficies secundi ordinis imaginaria et non degenerata, aut superficies secundi ordinis imaginaria et in cono degenerata, geometriam BOLYAI—LOBATSCHEFSKIJanam, RIEMANNianam aut EUCLIDEam adipiscimur.

8. Pars metrico-finita [F]. Cum spatium formularum ope repræsentari posse notum sit, pars metrico-finita, cuius auctores sunt DE TILLY (1879, 1892) et MINKOWSKI (1896), viri clarissimi, hoc spa-

tium expressione e duorum punctorum, quæ non infinite vicina sunt, coordinatis compositæ, definire ac describere studet.

9. Pars vectorialis [V]. Ea, quam clar. GRASSMANN (1841) introduxit et postea clar. CLIFFORD (1864) persecutus est, geometriæ relationes fundamentales pro methodo et symbolismo, qui calculi vectorialis proprius est, exprimendi consilium sequitur.

DE OPERUM INDICIS UTENDI RATIONE.

Operis titulus incipit auctoris nomine, cui præpositus est numerus ordinis, qui ad citandum pertinet; quam sequitur in priore parte signum, quod classem, ad quam pertinet, denotat. Infra, ubi de publicationibus in Ephemeridibus sive Actis litterariis agitur, Actorum titulus in abbreviatione, ut usus est, aut fere integrum citatur, prout Acta mathematicis magis vel minus cognita. Tomi numerus cifra Romana exprimitur, seriei autem numerus, qui antecedit est Arabicus et in parenthesi apponitur. In citando numeri extremi Actorum, in quibus libellus impressus est, paginas denotant.

Cum de libro separatim edito, qui argumento soli deditus est aut continet, quod ad id pertinet, agitur, oppidi, in quo liber impressus est, nomen excipit nomen librum suo sumpto vulgantis, deinde paginarum quot libro sunt aut paginarum, quæ in tomo argumento deditæ sunt, numerus.

Operum celeberrimorum traductiones ita citantur, ut quando edita sint, quidque ad opus, ex quo versum est, pertineat, indicetur. Quod autem bis impressum est, id cum priore editione citatur, qua in re dicetur, quo tempore iterum impressum sit.

Scriptum anno MCMII, Kalendis Novembribus.

CONSPECTUS HUIUS INDICIS.

PARS PRIOR

SCRIPTA MATHEMATICA.

1839.

1. MÄRCKER F. Theorie der Parallellinien, [E].
   — Meiningen; 16 p.
   — Editio secunda 1846; 26 p.

1840.

2. BISCHOF A. Ueber die Theorie der Parallelen, [E].
   — München; 34 p.
3. LOBATSCHEFSKY N. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, [E].
   — Berlin, 1840. 61 p.
   — Berlin, 1887; (Editio secunda).
   — Opera geometrica, Vol. II. p. 553—578. Cfr. Nr. 275.
   (Vide translationes sub Num. 36, 288.)
4. MÜLHOFER. Theorie der Parallellinien.
   — Essen; 7 p.

1841.

5. CAYLEY A. On a Theorem in the Geometry of Position, [F].
   — Cambridge Math. Jour., II; p. 267—271.
   — Math. Papers, t. I, Nr. 1.; p. 1—4.

1842.

6. PRINCE-SMITH J. Definition paralleler Richtung.
   — Berlin; 16 p.

1844.

7. GRASSMANN H. Die lineale Ausdehnungslehre, [V].
   — Leipzig.
   — Werke t. I, pars 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1894.

1846.

8. CAYLEY A. On some Analytical Formulæ and their application to the Theory of Spherical Coordinates, [E].
   — Cambridge and Dublin Math. Jour., I, p. 22—33.
   — Math. Papers, t. I, Nr. 32; p. 213—223.
9. DUDECK J. C. Versuch einer folgerechten Durchführung der Lehre von den parallelen Linien.
   — Hohenstein, 15 p.
10. SCHULZ. Ueber die Theorie der Parallellinien.
   — Königsberg i. N.; 17 p.

1847.

11. GRASSMANN H. Geometrische Analyse, [V].
— Leipzig, Weidmann.
— Werke, t. I, pars. 1. Leipzig, Teubner; 1894.

1848.

12. WIESZER G. Vollständige Verwandlung des eilften Euklidischen Grundsatzes in einen gewöhnlichen Lehrsatz, [E].
— Jena, 15 p.

1850.

13. BOUNIAKOWSKY V. Nouvelle théorie des parallèles [E].
— Saint-Petersbourg, Mémoires, IV; p. 87—107; 207—232.

14. GERMAR H. Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibauts Beweise u. s. w.
— Archiv d. Math. u. Phys. XV; p. 15.

1851.

15. BOLYAI W. Kurzer Grundriss eines Versuches etc. [E].
— Maros-Vásárhely, pag. 43—88.

16. ÜBERWEG. Die Principien der Geometrie, [G].
— Archiv. f. Philologie und Pädagogik, XVII. p. 20—56.

1852.

17. KRÜGER. Über die Lehre von den Parallellinien [E].
— Bromberg; 16 p.

1853.

18. BOUNIAKOWSKY V. De lineis parallelis (lingua Russica), [E].
— Petropoli, 77 p.

19. LAGUERRE. Note sur la théorie des foyers, [P].
— Nouv. Ann. XII; p. 57—66.

1854.

20. ERB. Die Probleme der geraden Linie, des Winkels und der ebenen Fläche.
— Heidelberg.

21. SCHULZ. Über die Theorie der Parallellinien. Zweite Abhandl.
— Königsberg i. N. 14 p.

1856.

22. LOBATSCHEFSKY N. I. Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, [E].
— Casani.
— Opera geom., Vol. II. p. 617—680. (Vide translationes sub Num. 42, 596).

1858.

23. BECK C. Nouvelle théorie des Parallèles, [E].
(Præfatio editionis belgicæ furtim factæ Elementorum *Legenderi.*)

24. JAURE M. Transformation des propriétés métriques des figures, [P].
— Nouv. Ann. XVII; p. 276—281; 381—386.

25. KRÜGER. Ein Beitrag zur Theorie der Parallelen.
— Fraustadt, 5 p.

1859.

26. CAYLEY A. A Sixth Memoir upon Quantics, [P].
   — Phil. Trans., CXLVIII, p. 61—90.
   — Math. Papers, t. II, Nr. 158; p. 561—592.

1860.

27. YOUNG G. P. The relation wich can be prowed subsist between the area of a Plane Triangle and the sum of the Hypothesis that Euclids's twelfth Axiom is false, [E].
   — Canadian Jour. of Industry, Science and Art. New Series, V.

1861.

28. COLLIGNON R. Essai sur la théorie des parallèles.
   — Saint-Petersbourg, Quesneville.

1862.

29. GRASSMANN H. Die Ausdehnungslehre, [V].
   — Berlin, Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.
   — Werke, t. I, pars 2. Leipzig, Teubner; 1896.

1863.

30. HOÜEL J. Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, [E].
   — Archiv. d. Math. u. Phys. XL.

1864.

31. LAURENT M. Théorie des parallèles, [E].
   — Mont-Louis, Clermont-Jerrand.

1865.

32. BELTRAMI E. Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da rette, [D].
   — Ann. Mat. (1), VII; p. 185—204.
33. CAYLEY A. Note on Lobatschewsky's Imaginary Geometry.
   — Phil. Mag. XXIX.
34. CLIFFORD W. Analytical Metrics, [P, V.]; (1864).
   — Quart. Journ., Nr. 25; p. 54—67.
   — Math. Papers, Nr. XI, p. 80.

1866.

35. CLIFFORD W. Analytical Metrics, [P, V]; (1864).
   — Quart. Jour., Nr. 29, p. 16—21; Nr. 30, p. 119—126.
   — Math. Papers, Nr. XI, p. 80—109.
36. LOBATSCHEFSKY N. Études géométriques sur la théorie des parallèles, [E].
   (Translatio Franco-Gallica operis sub Nr. 3 laudati, a *Houël* confecta.)
   — Bordeaux, Mem. IV.
   — Paris, G. Villars, 1866.
   — Paris, G. Villars, 1895.

1867.

37. Baltzer R. Elemente der Mathematik. Bd. II, editio secunda.
— Leipzig, Hirzel.

38. Battaglini G. Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky, [E].
— Gior. Mat., V, p. 211—231.
— Napoli, Rend. VI.

39. Bolyai J. La science absolue de l'espace, indépendant de la vérité ou fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir à priori) suivie de la quadrature du cercle, dans le cas de la fausșété de l'Axiome XI; [E].
(Translatio Franco-Gallica commentationis «Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens», a *Houël* confecta.)
— Bordeaux Mem. V; p. 207—248.

40. Hankel. Vorlesungen über die complexen Zahlen, [V].
— Leipzig.

41. Hoüel J. Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie, [E].
— Paris, G. Villars.
— Paris, G. Villars, II. ed., 1883; VI+91 p.

42. Lobatschefsky N. Pangeometria o sunto di geometria fondato sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele, [E].
(Translatio Italica operis sub No. 22 laudati, a *Battaglini* confecta.)
— Gior. Mat. V, p. 273—336.

43. Witte G. Parallelentheorie, [E].
— Wolfenbüttel.

1868.

44. Baltzer R. Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie, [E].
— Leipzig. Berichte; XX.

45. Battaglini G. Sur la géométrie de Lobatschewsky, [E].
— Nouv. Ann. (2), VII; p. 209—256.

46. Beltrami E. Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, [D].
— Giorn. Mat. VI; p. 285—315.
(Vide: translationes sub Num. 54, 318.)

47. id. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, [D].
— Ann. Mat. (2), II; p. 232—255.
(Vide translationes sub Num. 55, 319.)

48. Bolyai J. Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, [E].
(Versio Italica comm. «Appendix etc.», a *G. Battaglini* confecta.)
— Giorn. Mat. VI; p. 97—116.

49. Helmholtz H. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, [G].
— Heidelberg, Verhandl. d. natur. med. Vereins, IV, 1868; p. 197—202. V, 1869; p. 31—32.
— Wissensch. Abhandl. Bd. II, 1883; p. 610—617.
(Vide translationes sub Num. 51; 323; 376.)

50. id. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, [G].
— Göttinger Nachr. XV; p. 193—221.
— Wissenschaftl. Abhandl. Bd II, 1883; p. 618—639.

51. id. Sur les faits qui servent de base à la géométrie, [G].
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 49 laudati, a *Houël* confecta.)
— Bordeaux Mem. V.
— Paris, Hermann 1895.

52. LÜROTH J. Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linien, [D].
— Zeitschr. f. Math. u. Phys. XIII; p. 156—162.

53. RIEMANN B. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, (1854), [D].
— Göttinger Abhand. XIII; p. 1—20.
— Mathematische Werke, 1876; p. 254—269; editio secunda, 1892; p. 272—287.
(Vide translationes sub Num. 69; 106; 163; 335; 391; 392; 489.)

1869.

54. BELTRAMI E. Essai d'interpretation de la géométrie non euclidienne, [D].
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 46 laud., a *Houël* confecta.)
— Ann. École Norm., VI; p. 251—288.

55. id. Théorie fondamentale des espaces de courbure constante, [D].
(Translatio Franco-Gallica comm. sub No. 47 laud., a *Houël* confecta.)
— Ann. École Norm., VI, p. 347—377.

56. CHRISTOFFEL E. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., LXX; p. 46—70.

57. id. Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., LXX; p. 241—245.

58. CLIFFORD, W. On the Theory of Distance [P, V].
— Report of the thirty-ninth meeting of the British association for the Advancement of science, 1869.; p. 9.
— Math. Papers, 1882, Nr. XVI; p. 130—164.

59. GENOCCHI A. Dei principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato di Euclide, [E, M].
— Soc. Italiana, Mem. (3), II.

60. KRONECKER L. Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln, [D].
— Berlin. Monatsber., p. 159—193; 688—698.
— Werke Bd. I, (Leipzig, 1895), pag. 175—226.

61. LIPSCHITZ R. Untersuchungen in Betreff der ganzen und homogenen Functionen von n Differentialen, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., LXX; p. 71—102.

1870.

62. FIEDLER W. Ueber die projectivischen Coordinaten, [P].

— Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich ; XV; p. 152—182.

63. Flye S. Marie. Sur le postulatum d'Euclide, [E].
— Inst. I, sect. XXXVIII; p. 53—54.

64. Grunert J. A. Allgemeine analytische Theorie der Funktion $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Vierecke, [E].
— Archiv. d. Math. u. Phys., LI; p. 423—498.

65. Hoüel J. Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide [E].
— Inst. I. sect. XXXVIII. p. 85—86.

66. id. Note sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit Postulat d'Euclide, [E].
— Bordeaux. Mem. VIII;
— Nouv. Ann. (2), IX: p. 93—96.
— Giorn. Mat., VIII; p. 84—89.

67. Lipschitz R. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., LXXI. p. 274—287; p. 288—295.

68. id. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Variabeln, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., LXXII; p. 1—56.

69. Riemann B. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, [D].
(Traductio Franco-Gallica operis sub No. 53 laudati, a *Houël* confecta.)
— Ann. Mat. (2); III; p. 309—327.
— Paris, Hermann. 1895.

70. Schering E. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume, [F, M].
— Gött. Nachr.; p. 311—321.

71. Tilly (de) J. M. Études de mécanique abstraite, [M].
— Belgique Mem. Couronnées, XXI; p. 1—98.

1871.

72. Baltzer R. Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie, [E].
— Jour. f. reine u. ang. Math. LXXIII; p. 372—373.

73. Beltrami E. Osservazione alla precedente nota del Sig. Prof. Schläfli, [D]. (Cfr. No. 79.)
— Ann. Mat. (2) V; p. 194—199.

74. Flye S. Marie. Études analytiques sur la théorie des parallèles, [E].
— Paris, G. Villars: IV+156 p.

75. id. Études analytiques sur la théorie des parallèles, [E].
— Mondes, (2), XXVI; p. 219—220.

76. Fresenius F. C. Die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde, (E].
— Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht II; p. 494—504.

77. Klein F. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, [P].
— Math. Ann. IV; p. 573—625.
— Gött. Nachr.: p. 419—433.

— Bull. Sc. Math.; p. 341—351.
(Vide translationem sub No. 435.)

78. LIPSCHITZ R. Extension of the Planete-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature, [D].
— Quarterly Jour., XII.

79. SCHLÄFLI L. Nota alla memoria del Sig. Beltrami «Sugli spazii di curvatura costante», [D].
— Ann. Mat. V; p. 178—194.

80. SUVOROV. De characterismo systematum trium dimensionum (lingua Russica).
— Casani.
(Vide translationem sub No. 110.)

1872.

81. BELTRAMI E. Teorema di geometria pseudosferica, [D].
— Giorn. Mat. X; p. 53.

82. id. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche, [D].
— Giorn. Mat. X; p. 141—160.

83. BOUNIAKOWSKI V. Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne, [E].
— Petersbourg, Mém. Acad. (7) XVIII.

84. CASSANI P. Geometria rigorosa, [E].
— Venezia.

85. CAYLEY A. On the Non-Euclidian Geometry, [P].
— Math. Ann. V; p. 630—634.
— Math. Papers, t. VIII, Nr. 528, p. 409—413.

86. FIEDLER W. Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, [P].
— Leipzig; Teubner.

87. FRISCHAUF J. Absolute Geometrie, nach J. Bolyai; [E].
— Leipzig; Teubner; XII+96. p.

88. KLEIN F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, [G].
— Erlangen; A. Deichert.
— Math. Ann. XLIII; 1893; p. 63—100.
(Vide translationes sub Num. 260; 287; 329; 402.)

89. id. Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, [P].
— Math. Ann., V; p. 278—302.

90. id. Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie [P, D].
— Math. Ann. V; p. 257—278.

90a. KÖNIG J. Über eine reale Abbildung der sog. Nicht-Euklidischen Geometrie.
— Gött. Nachr., p. 157—160.

91. LIE S. Ueber Complexe, insbesondere Linien und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen, [P].
— Math. Ann., V; p. 145—246.

92. LIPSCHITZ R. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welcher das Problem der Mechanik enthalten ist, [D].

— Jour. f. reine u. ang. Math. LXXIV; p. 116—149.

93. id. Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von *n* Differentialen u. den Abelschen Transcendenten, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math. LXXIV; p. 150—171.

94. SALETA F. Exposé sommaire de l'idée d'espace au point de vue positif, [E].
— Paris.

95. SCHLEGEL V. System der Raumlehre. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, [V].
— Leipzig, G. B. Teubner. I. Theil, XVI + 156 p.; II. Theil (1875), XVI + 260 p.

96. TILLY (de) J. M. Flye St. Marie. Études analytiques sur la théorie des parallèles, [E].
— Bull. Sc. Math. III; p. 131—138.

1873.

97. CASSANI P. Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria, [E].
— Giorn. Mat., XI; p. 333—349.

98. CLIFFORD W. Preliminary Sketch on Biquaternions, [V].
— London M. S. Proc. IV; p. 381—395.
— Math. Papers, No. XX; p. 181—200.

99. DARBOUX G. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires. Note V; p. 227—235. [P, D].
— Paris, Gauthier-Villars.

100. FRAHM W. Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung [P].
— Zeitschr. f. Math. u. Phys.; XVIII; p. 368—387.

101. id. Habilitationsschrift, [P].
— Tübingen.

102. FRESDORF. Ueber die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemann'schen Raum, [M].
— Dissertation, Göttingen.

103. GENOCCHI A. Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques, [E].
— Belgique Bull. (2), XXXVI; p. 181—196.

104. KLEIN F. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, [G], [D], [P].
— Math. Ann. VI; p. 112—145.

105. LINDEMANN F. Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung, [P, M].
— Erlang. Berichte 28. Juli.

106. RIEMANN B. On the hypotheses which lie at the bases of Geometry, [D]. (Versio Anglica commentationis sub No. 53 laud., a *Clifford* confecta.)
— Nature, VIII; p. 14—17; 36, 37.
— *Clifford*, Math. Papers, 1882, No. IX; p. 55—71.

107. SCHERING E. Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume, [F, D].
— Gött. Nachr.; p. 6—11; p. 13—21.

108. STAHL H. Ueber die Massfunctionen der analytischen Geometrie, [P].
— Berlin, Programm.

109. TILLY (de) J. M. Rapport sur cette lettre.
(Cfr. No. 103.)
— Belgique Bull. (2); XXXVI; p. 124—139.

110. SOUVOROFF. Sur les characteristiques des systèmes à trois dimensions, [D].
(Excerptum operis sub No. 80 laudati.)
— Bull.Sc. Math.; IV; p. 180—192.

1874.

111. BATTAGLINI G. Nota sui circoli della geometria non Euclidea, [P].
— Giorn. Mat. XII; p. 213—220.

112. id. Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche, [P].
— Giorn. Mat. XII; p. 193—200.

113. id. Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche, [P].
— Giorn. Mat. XII; p. 266—276.

114. BEEZ R. Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, [D].
— Math. Ann. VII; p. 387—396.

115. CLIFFORD W. Motion of a Solid in Elliptic space, [M].
— London Math. Society, 12. Febr. 1874. [384.
— Math. Papers. Nr. XLI; p. 378—

116. ESCHERICH G. Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung, [D].
— Wien, Sitzungsber. LXIX; p. 497—526.

117. GRASSMANN H. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre, [V].
— Math. Ann. VII; pag. 538—549.

118. KLEIN F. Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie, [P].
— Math. Ann. VII; p. 531—537.

119. LINDEMANN F. Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung, [M, P].
— Math. Ann. VII; p. 56—143.

120. LIPSCHITZ R. Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen, [D].
— Journ. f. reine u. ang. Math. LXXVIII; p. 1—45.

121. OVIDIO (d') E. Studio sulla Geometria proiettiva, [P].
— Ann. Mat. (2) VI; p. 89—101.

122. SALMON-FIEDLER. Analytische Geometrie des Raumes; I. Teil; p. 297—314, [P].
— Leipzig, Teubner.

123. WAGNER H. Lehrbuch der ebenen Geometrie. Nach Grundsätzen Bolyai's für Gymnasien und Realschulen bearbeitet, [E].
— Hamburg, Gräfe.

1875.

124. Becker J. Die Grundlagen der Geometrie, [E].
— Zeitschr. f. Math. u. Phys. XX; p. [445—456.

125. Beez R. Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, [D].
— Zeitschr. f. Math. u. Phys. XX.; p. 423—444.

126. id. Über conforme Abb. von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, [D].
— Zeitschr. f. Math. u. Phys. XX; p. 253—270.

127. Ovidio (d') E. Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e 2° grado in Geometria proiettiva [P].
— Giorn. Mat. XIII, p. 363—379.
— Napoli Rend.; XIV; 12 p.

128. id. I complessi e le congruenze lineari nella Geometria proiettiva, [P].
— Ann. Mat. (2), VII; p. 25—51.

129. Réthy M. A három méretü homogén tér u. n. nem-euklidikus siktani trigonometriája (Cfr. Nr. 149), [E].
— Értekezések a Math.Tud.Köréből (Comm. Acad. Litter. Hung.) VI. Nr. VII; p. 1—25.

130. Spitz C. Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen. Nach Bolyai's Grundsätzen, [E].
— Leipzig und Heidelberg; Winter.

1876.

131. Beltrami E. Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante, [M].
— Bull. Sc. Math. XI; p. 233—240.

132. Clifford W. On theory of Screws in a space of constant positive curvature, [M].
— Math. Papers. Nr. XLIV; p. 402—405.

133. id. On the classification of Geometric Algebras, [V].
— London M. S. Proc.; VII; p. 135.
— Math. Papers, Nr. XLIII; p. 397—401.

134. id. On the Free Motion under no forces of a rigid system in an n—fold Homaloid, [M].
— London, M. S. Proc.; VII; p. 67—70.
— Math. Papers. Nr. XXVI; p. 236—240.

135. id. Furter note on Biquaternions (Elliptic space), [P, V].
— Math. Papers. Nr. XLII; p. 385—395.

136. id. Notes on Biquaternions, [V].
— Math. Papers p. 395—396.

137. Cremona. Sulla correspondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie, [P].
— Lincei. Atti; (2), III.

138. Dedekind R. et Weber, H. «Anmerkungen» in «B. Riemanns Mathem. Werke» p. 384—399, editio secunda 1892, p. 405—423.
— Leipzig, Teubner.

139. Enneper. Bemerkungen über einige Flächen mit konstantem Krümmungsmass, [D].

— Gött. Nachr.; p. 597—616.

140. Frischauf J. Elemente der absoluten Geometrie, [E].
— Leipzig, G. B. Teubner; XI + 142 p.

141. Günther S. Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche—Complemento alla geometria assoluta di Bolyai (E sermone German. in Ital. vertit *Speragna*), [E].
— Giorn. Mat. XIV; p. 97—107.

142. Hoppe R. Principien der Flächentheorie [D].
— Leipzig, C. A. Koch, pag. 55—61.
— ed. secunda 1892.

143. Lipschitz R. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface, [D].
— Comptes Rendus, LXXXII.
— Journ. f. reine u. ang. Math., LXXXI; p. 295—300.

144. id. Beitrag zur Theorie der Krümmung, [D].
— Journ. f. reine u. ang. Math., LXXXI; p. 230—242.

145. Ovidio (d') E. Alcune proprietà metriche dei complessi e congruenze lineari in geometria proiettiva, [P].
— Lincei, Atti; (2), III; p. 260—268.

146. Ovidio (d') E. Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-proiettiva, [P].
— Lincei, Atti; (2), III; p. 561—581.

147. id. Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico-proiettiva, [P].
— Lincei, Atti; (2), III; p. 723—755.

148. id. Nota sulle proiezioni ortog. nella geometria metrico-proiettiva, [P].
— Giorn. Mat. XIV, p. 298—305.

149. Réthy M. Die Fundamentalgleichungen der nicht-Euclidischen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet, (Excerptum operis sub No. 129 laud.) [E].
— Archiv d. Math. u. Phys.; LXIII; p. 416—423.

150. Riemann B. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab illma. Academia Parisiensi propositæ (1861). [D].
— Mathematische Werke; editio secunda, 1892, p. 391—404.
— Leipzig, Teubner..

151. Tannery J. Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle même [P].
— Bull. Soc. Math.: (1), IX; p. 221—223.

152. Zöllner J. Principien einer electrodynamischen Theorie d. Materie, [M.]
— Leipzig.

1877.

153. Becker J. Die Elemente der Geometrie auf neuerer Grundlage streng deductiv dargestellt [E].
— Berlin, Weidmann, Bd I.

154. Beez R. Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung- [D],
— Zeitschr. für Math. und Phys. XXI; p. 373—410.
155. Cassani P. Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria, [E].
— Giorn. Mat., XV; p. 284—288.
156. Frankland W. On the simplest continuons manifoldness of two dimensions and of finite extent, [D].
— London M. S. Proc. VIII; p. 57—64.
157. Genocchi A. Sunto di una memoria di A. Genocchi «intorno ai principi della geometria» [E].
— Torino, Atti, XII; p. 489—495.
158. id. Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non Euclidiennes, [E, M].
— Torino, Mem. (3); XXIX.
— Bull. Sc. Math., II; p. 207—209.
159. Killing W. Über einige Bedenken gegen die Nicht-Euklidische Geometrie.
— Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr.; VIII; p. 220—222.
160. Newcomb S. Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension, [E].
— Journ. f. reine u. ang. Math.; LXXXIII; p. 293—300.
161. Ovidio (d') E. Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante, [P].
— Lincei, Mem. (3); I; p. 133—193.
162. id. Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante. — (Cfr. Nr. 161) [B].
— Math. Ann. XII; p. 403—418.
163. Riemann B. Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen, (Translatio Polonica operis sub Nr. 53 laudati, a *Dickstein* facta cum annotationibus *Gosiewi*), [D].
— Commentat. Acad. Litt. Cracoviensis IX.
164. Zolt (de) A. Saggio di Pangeometria, [E].
— Giorn. Mat. XV; p. 336—361.

1878.

165. Battaglini G. Sull'affinità circolare non euclidea [P].
— Giorn. Mat. XVI; p. 256—262.
166. Bianchi L. Sull'applicabilità delle superficie negli spazi a curvatura costante, [D[.
— Lincei, Mem. (3), II; p. 149.
167. Clifford W. Application of Grassmann's extensive Algebra, [V].
— Am. Jour., I; p. 350—358.
— Math. Papers. Nr. XXX; p. 266—276.
168. De Paolis R. La trasformazione piana doppia di secon d'ordine e la

sua applicazione alla geometria non-euclidea, [P].
— Lincei, Mem. (3), II; p. 31—50.

169. Frattini G. Un caso particolare del teoremi dei nove punti di Feuerbach, sua generalizzazione nella geometria non-euclidea, [E].
— Gior. Mat. XVI; p. 298—305.

170. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre von 1844, oder die lineale Ausdehnungslehre, [V].
— Leipzig, — Verlag von Otto Wignand.
— Werke, t. I, pars 1; 1894.

171. Killing W. Über zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math. LXXXVI; p. 72—83.

172. Monro C. Flexure of Space, [D].
— London M. S. Proc.; IX; p. 171—177.

173. Netto E. Beitrag zur Mannigfaltigfaltigkeitslehre, [D].
— Journ. f. reine und ang. Math. LXXXVI; p. 263—268.

174. Salmon G. — Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte, [P].
— Leipzig, Teubner: XXII. Kap.; p. 560—616.

1879.

175. Ball R. S. The non-Euclidean geometry, [E].
— Hermathea; VI; p. 500—541.

176. Beez R. Über das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten, [D].
— Zeitschr. für Math. u. Phys; XXIV; p. 1—17; p. 65—82.

177. Kettner F. W. Beschouwingen over de theorie der evenwijdige lijnen als grondslag der meetkunde, [E].
— Dissertatio inauguralis — Leiden.

178. Schlegel V. Über neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, [V].
— Zeitschr. für Math. und Phys.; XXIV; p. 83—96.

179. Tilly (de) J. Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, [F, E].
— Bordeaux, Mém. (2); III; p. 1—190.

180. Tirelli F. Osservazioni sulla retta e sul piano, [E].
— Napoli; p. 22.

1880.

181. Cassani P. Intorno ad alcune generazioni della retta e del piano, [E].
— Istituto Veneto; Atti; (3), II; p. 45—52.

182. Darboux G. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, [P].
— Math. Ann. XVII; p. 55—62.

183. Killing W. Die Rechnung in den nicht-Euklidischen Raumformen, [E].

— Journ. f. reine u. ang. Math. XC p. 265—285.

184. KLEIN F. Über die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden der ersten Stufe, [P].
— Math. Ann., XVII; p. 52—55.

185. RICORDI E. I circoli nella geometria non-euclidea, [P].
— Giorn. Mat., XVIII; p. 255—270.

186. STEPHANOS M. Sur la rélation qui existe entre le problème de la trigonometrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires, [P].
— Bull. S. M. F. X; p. 134—137.

187. VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO. Euclidis Elementa cum introductione et annotationibus (lingua Russica), [E].
— Kijoviæ, Typographia Universitatis Scti. Wladimir; XVI. 758 p.

188. VOSS A. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten, [D].
— Math. Ann., XVI; p. 121—178.

189. id. Zur Theorie des Riemann'schen Krümmmungsmasses, [D].
— Math. Ann., XVI; p. 571—576.

1881.

190. ASCHIERI F. La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non euclideo, [P].
— Ist. Lomb., Rend., (2), XIV; p. 673—683.

191. BELTRAMI A. Sulle equazioni generali della elasticità [M].
— Ann. Mat., (2), X; p. 188—211.

192. COX H. Homogeneous coordinates in imaginary Geometry, [P].
— Quart. Jour. XVII; p. 178—215.

193. GÜNTHER S. Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen. — Kap. VI. Die rechnerischen Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. p. 297—336. [E].
— Halle. L. Nebert.

194. NEBELUNG. Trigonometrie der Flächen mit constantem Krümmungsmass, [D].
— Progr. Dortmund.

195. SCHUR F. Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, [P].
— Math. Ann., XVIII; p. 252.

196. STORY W. E. On the non-Euclidean Trigonometry, [P].
— Am. Jour. IV, p. 332—335.

197. OPITZ. Einige Sätze über die Anziehung im mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Raume.
— Göttingen.

1882.

198. ASCHIERI F. La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non-Euclideo, [P].

— Istituto Lombardo, Rend. (2), XV; p. 66—77; 147—154; 247—250.

199. Cassani P. I nuovi fondamenti della geometria, [E].

— Gior. Mat., XX; p. 143—166.

200. Cox H. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space [V].

— Cambridge Trans., XIII; p. 69—143.

201. Koenigs G. Sur les propriétés infinitesimales de l'espace réglé, [P].

— Ann. École Norm., XI; p. 219—338.

— Paris, G. Villars.

202. Lipschitz R. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften, [D].

— Berliner Ber., I; p. 1077—1087.

— Bull. Sc. Math. (2), XXII, 1887; 112—120.

203. Pasch M. Vorlesungen über neuere Geometrie, [P].

— Leipzig, Teubner, IV+ 210 p.

204. Ricordi E. I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva, [M. P].

— Viterbo, Agnesotti; p. 1—68.

205. Story W. E. Note on the non-Euclidian trigonometry, [P].

— J. Hopkins Circ.; p. 211.

206. id. On the non-Euclidian Geometry, [P].

— Am. Journ.; V.; p. 180—211.

207. id. On Non-Euclidean properties of Conics [P].

— Am. Journ.; V; p. 358—381.

208. Study E. Über Distanzrelationen, [P].

— Zeitschr. f. Math.u. Phys.; XXVII; p. 140—160.

1883.

209. Killing W. Über die Nicht-Euklidischen Raumformen von n Dimensionen, [D].

— Braunsberg, Huye.

210. Lobatschefsky N. I. Opera omnia. — Vol. I: De fundamentis geometriæ (1829); Geometria imaginaria (1835); Applicatio geometriæ imaginariæ ad theoriam aliquod integralium (1836); Nova principia geometriæ cum theoria completa parallelarum (1835—38); Pangeometria (1856) (lingua Russica) [E].

— Casani.

211. Most. Neue Darlegung der absoluten Geometrie u. Mechanik, mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltenraumes, [M].

— Coblenz.

212. Petersen J. Om Mathematikens Grundbegreber. Bevis for Sätningen om Trekantens Vinkelsum, [E].

— Tidsskrift for Mat. (5); I; p. 1—11.

(Vide translationem sub Nr. 239).

213. POINCARÉ H. Mémoire sur les groupes kleinéens, [P].
— Acta Math. III; p. 49—92.

1884.

214. ASCHIERI F. Geometria proiettiva e descrittiva. Volume I; Geometria proiettiva; p. 331—354, [P].
— Milano, Hoepli.

215. BUCHHEIM A. On the theory of screws in elliptic space, [M].
— London M. S. Proc., XV, p. 83—98; XVI, 15—27.

216. CAYLEY A. On the Non-Euclidian plane geometry, [P].
— London R. S. XXXVII; p. 82—102.
— Math. Papers. t. XII; Nr. 827; p. 220—238.

217. DE-PAOLIS R. Elementi di geometria, [E]. (Note; p. 467—478).
— Torino, Loescher.

218. HEAT R. S. On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space, [M].
— Phil. Trans., CLXXV; p. 281—324.
— London R. S., XXXVI; p. 219—221.

219. SCHMITZ A. Aus dem Gebiete der nicht-euklidischen Geometrie, [E].
— Neuburg a D.

220. SEGRE C. Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie, [P].
— Torino, Atti, XIX; p. 159—187.

1885.

221. BRILL A. Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, [D].
— Math. Ann. XXVI; p. 300—303.

222. KILLING W. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, [D].
— Leipzig, Teubner, XX+264. p.

223. id. Die Mechanik in den nicht-euklidischen Raumformen, [M].
— Jour. f. reine u. ang. Math., XCVIII; p. 1—49.

224. PORCHIESI A. Sopra una corrispondenza fra lo spazio non Euclideo ed il piano Euclideo, [E].
— Bologna, Mem., (4); V; p. 421—452.

225. QUENSEN C. Der Cylinder im homogenen Raum, [E].
— Arch. d. Math. u. Phys., (2), III; p. 45—51.

226. STOLZ O. Das letzte Axiom der Geometrie, [E].
— Berichte d. naturw. medic. Vereins in Innsbruck. XV; p. 25—37.

227. STUDY E. Über die Massbestimmung extensiver Grössen, [V].
— Wien, Berich. XCI; p. 100—137.

228. THUE A. Am en Dualisme i den absolute Geometri, [E].
— Tidsskrift for Mat. (5), III; p. 129—147.

229. id. Et bidrag til den absolute geometri, [E].
— Lie Arch., X; p. 304—328.

1886.

230. BUCHHEIM A. On the theory of screws in elliptic space, [M].
— Lond. M. S. Proc.; XVII; p. 240—254.

231. LIE S. Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, [G].
— Leipzig, Berich. XXXVII; p. 337—342.
— (Vide translationem sub Nr. 331).

232. RICORDI E. Una generalizzazione del problema dei nove punti di Feuerbech nella geometria non-euclidea, [P].
— Reggio Calabria; 17. p.

233. SCHUR F. Über die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses, [D].
— Math. Ann., XXVII; p. 163—172.

234. id. Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen, [D].
— Math. Ann., XXVII; p. 537—567.

1887.

235. BANG A. S. Nogle Maximumsproblemer i den ikke euklidiske Geometri, [E].
— Tidsskrift for Math. (5), V; p. 136—141.

236. BIANCHI L. Sulle superficie d'area minima negli spazî a curvatura costante, [D].
— Lincei, Mem., (4), IV; p. 503—519.

237. id. Sui sistemi di Weingarten negli spazî di curvatura costante, [D].
— Lincei, Mem., (4), IV; p. 221—256.

238. PASCH M. Über die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde, [P].
— Math. Ann., XXX; p. 127—131.

239. PETERSEN J. Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. (Editio Germanica comm. sub Nr. 212 laud.), [E].
— Math. Ann., XXIX; p. 239—246.

240. POINCARÉ H. Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, [G].
— Bull. S. M. F., XV; p. 203—216.
— (Vide translationem sub No. 334).

241. REYES Y PROSPER. Sur la Géométrie non Euclidienne, [P].
— Math. Ann., XXIX; p. 154—156.

242. SIBIRIAKOFF M. Les principes de la géométrie élémentaire, [E].
— Moscou.

1888.

243. BALL R. S. On the theory of Content, [P].
— Dublin, Trans. XXIX; p. 123—182.

244. BIANCHI L. Sulle forme quadratiche differenziali definite, [D].
— Lincei, Mem., (4), V; p. 539—603.

245. **Cesaro** E. Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazî curvi, [M].
— Lincei, Rend. (4), IV; p. 376—384.

246. **Dogson** L. Curiosa Mathematica. Pars I. A New Theory of parallels, [E].
— London, Macmillan; 86. p.

247. **Duchemin** P. Des parallèles dans l'espace. — Droites et plans parallèles, [E].
— Avranches; 16. p.

248. id. Théorie des parallèles sans postulatum et certitude de la Géométrie, [E].
— Coutances; 78. p.

249. id. Théorie des parallèles et certitude de la Géométrie, [E].
— Coutances; 16. p.

250. **Pasch** M. Über die uneigentlichen Geraden und Ebenen, (Auszug aus einem Schreiben an Herrn V. Reyes y Prosper), [P].
— Math. Ann., XXXII; p. 159—160.

251. **Peano** G. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, [V].
— Torino, Bocca; X + 170. p.

252. **Reyes y Prosper**. Sur les propriétés graphiques des figures centriques. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. Pasch); [P].
— Math. Ann., XXXII; p. 157—158.

253. **Somigliana** C. Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico in uno spazio di curvatura costante. [M].
— Ann. Mat., XVI; p. 101—116.

254. **Tarry** G. Nouvel essai sur la géométrie imaginaire.
— Paris, 32. p.

1889.

255. **Bonnel** J. Note sur la définition des parallèles. Sur la Géométrie imaginaire, [E].
— Mém. Lyon. Acad.; p. 26.

256. **Burnside** W. On the resultant of two finite displacements of a rigid body, [M].
— Mess. of Math., XIX; p. 104—108.

257. **Commines de Marsilly** A. Études sur le «postulatum» d'Euclide et sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, [E].
— Ass. Fran. XVII; p. 88—100.

258. **Goursat** E. Sur les substitutions orthogonales et les divisions regulières de l'espace, [P].
— Ann. École Norm. VI; p. 1—102.

259. **Klein** F. Nicht-Euklidische Geometrie (Prælectiones lithogr. I) [C].
— Göttingen.

260. id. Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti, [G]. (Translatio Italica operis sub No. 88 laud., a *Fano* confecta.)
— Ann. Mat. (2) XVII; p. 307—343.

261. **Mansion** P. Sur la géométrie non-Euclidienne, [E].
— Brux. S. sc., XIII, A; p. 57—61.

262. Padova. La teoria di Maxwell negli spazi curvi, [M].
— Lincei, Rend., (4); V; p. 875—880.
263. Peano G. I principî di geometria logicamente esposti, [E].
— Torino, Bocca.
264. Reina V. Sugli oricicli delle superficie pseudosferiche, [D].
— Lincei, Rend. (4); V; p. 448—456.
265. Sbrana. Il teorema di Pitagora ed il postulato delle parallele, [E].
— Periodico di Mat., IV; p. 104—107.
266. Suini A. Sulla teoria delle parallele, [E].
— Periodico di Mat. IV; p. 134—139.
267. Tarry G. Géométrie générale.
— Ass. Franç., XVIII; p. 60—87.

1890.

268. Brodén T. Om geometriens principer, [E].
— Pedagogiste Tidsskrift Halmstad; 36. p.
269. Cayley A. Non-Euclidian Geometry, [P].
— Cambridge Trans., XV; p. 37—61.
— Cambridge Proc., VII; p. 35.
— Math. papers; t. XIII. Nr. 951.
270. id. Sur les surfaces minima, [P].
— Comptes Rendus, CXI; p. 953—954.
— Math. Papers. XIII; No. 899; p. 41—42.
271. Galinon A. Étude de cinématique à deux et à trois dimensions, [M].
— Paris; 129. p.
272. Klein F. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, [P, D].
— Math. Ann., T. XXXVII; p. 544—572.
273. id. Nicht-Euklidische Geometrie. (Prælectiones lithogr. II) [D].
— Göttingen; 257. p.
274. Lie S. Über die Grundlagen der Geometrie, [G].
— Leipzig. Berich. XLII; p. 284—321; p. 355—418.
275. Lobatscheffsky N. J. Collectio operum geometricorum. Vol. II (Scripta lingua Franco-Gallica ac Germanica), [E].
— Casani.
276. Schüller Fr. W. Über das Axiom (den Satz) von der Winkelsumme im Dreieck, [E].
— Programmabhandlung, Realsch. Ansbach. Leipzig.
277. Simon M. Elementar-geometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie, [E].
— Journ. f. reine u. ang. Math., CVIII; p. 84—86.
278. id. Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie, [E].
— Strassburg, R. Schultz; IV+74. p.
279. Tarry G. Géométrie générale — La ligne droite, [E].
— Assoc. Franç., XIX; p. 152—185.
280. Varisco D. Complementi di pangeometria, [E].

— Giorn. Mat., XXVIII; p. 181—192.

281. VIVANTI G. Osservazioni sulla nota del Dottore D. Varisco, [E].
— Giorn. Mat.; XXVII; p. 240.

1891.

282. AMODEO F. Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di un' *Sr.*, [P].
— Torino, Atti, XXVI; p. 741—770.

283. BOLYAI J. The science absolute of space. Independent of the Truth or falsity of Euclid's Axiom XI (which never can be established a priori). By John Bolyai. Translated from the original Latin by George Bruce Halsted. (Translatio Anglica operis «Appendix etc.»).
— Science Baccalaureus, I.
— Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, V; p. 94—135.
— editio tertia, Austin, Texas, U. S. A. 1894.
— editio quarta, ibid., 1896, XXX+72. p.

284. CLEBSCH-LINDEMANN. Vorlesungen über Geometrie. Dritte Abtheilung. «Die Grundbegriffe der projectivischen und metrischen Geometrie», [E].
— Leipzig, Teubner; II. Bd; I. Theil; p. 433—637.

285. DIXON E. T. The foundations of geometry, [E].
— Cambridge, Deighton, Bell. and. Co., VII+143. p.

286. KILLING W. Über die Clifford-Klein'schen Raumformen, [D, M].
— Math. Ann. XXXIX; p. 257—278.

287. KLEIN F. Considérations comparatives sur les rechèrches géométriques modernes; (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 88 laudati, confecta a *Padé*), [G].
— Ann. École. Norm. (3) VIII; p. 87—102; p. 173—199.

288. LOBATSCHEFFSKY N. Geometrical researches on the theory of paralleles, [E].
(Translatio Anglica operis sub No. 3 laudati, a *Halsted* confecta).
— Austin, Texas, U. S. A.
— Tokyo sugaku-butsurigiku kawai kiji, V; p. 6—50.

289. ISELIN J. J. Die Grundlagen der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik einheitlich dargestellt, [E].
— Bern, K. J. Wyss; 244. p.

290. MANSION P. Relation entre les distances de cinq points en géométrie non-Euclidienne, [F].
— Brux. S. sc. XV, A; p. 8—11.

291. id. Notes sur la géométrie Euclidienne et sur les géométries non-Euclidiennes, [E].
— Mathesis (2) I, Suppl. I; 32. p.

292. OVIDIO (d') E. Teoremi sulle coniche nella metrica-proiettiva, [P].
— Torino, Atti, XXVI; p. 525—535.

293. id. Le proprietà focali delle coniche nella metrica-proiettiva, [P].
— Torino, Atti, XXVI; p. 339—366.

294. id. Sulle coniche confocali nella metrica-proiettiva, [P].
— Torino, Atti, XXVI; p. 226—437.

295. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE. Traité de Géométrie, édit. VI, [E].
— Note II; Paris.

296. SCHUR F. Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie, [P].
— Math. Ann., XXXIX; p. 113—124.

297. SCHMIDT E. V. Euklid's XI. Axiom durch eine neue Definition der geraden Linie bewiesen, [E].
— Moskau, J. Deubner; 24. p.

298. SIMON M. Über das Parallelenaxiom, [E].
— Naturf. Ges. Halle, LXIV; p. 5.

299. id. Zu den Grundlagen der nicht-Euklidischen Geometrie, [E].
— Programmabhandlung. Lyceum Strassburg; 32. p.

300. STUDY E. Von den Bewegungen und Umlegungen, [E, G].
— Math. Ann., XXXIX; p. 441—556.

301. TARRY G. Géométrie générale. Le cercle et la trigonométrie.
— Ass. Franç., XX; p. 90—118.

302. VERONESE G. Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare, [E].
— Padova, Tipografia del Seminario, XLVIII+628. p; (Vide translationem sub No. 361).

1892.

303. BIANCHI L. Sui Gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici, [P].
— Math. Ann. XL; p. 332—412.

304. BUSCHE E. Über eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung in der Ebene, [F, P].
— Hamb. Mitt., III; p. 37—57.

305. FANO G. Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, [P].
— Gior. Mat. XXX; p. 106—132.

306. FONTENÉ M. G. L'hyperspace à (n—1) dimensions, [P].
— Paris, Gauthier-Villars; XVIII + 133. p.

307. GÉRARD L. Sur la géométrie non-euclidienne. Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, [E].
— Paris, G. Villars, 10 p.
— Jour. des Math. spéc. (4), II; 1893. p. 156—158.

308. KILLING W. Über die Grundlagen der Geometrie, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., CIX; p. 121—186.

309. LIE S. Sur les fondements de la Géométrie, [G].
— Comptes Rendus, CXIV; p. 461—463.

310. id. Bemerkungen zu neueren Unter-

suchungen über die Grundlagen der Geometrie, [G].
— Leipzig. Berichte; XLIV; p. 106—114.

311. Pietzker F. Über die absolute Geometrie, [E].
— Zeitschr. für math. Unter., XXIII; p. 81—106.

312. Simon M. Über das Parallelenaxiom, [E].
— Deutsche Math. Ver., I; p. 39—41.

313. id. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie, [E].
— Jour. f. reine u. ang. Math.; CIX; p. 187—198.

314. Sikstel W. R. De theoremate fundamentali geometriæ spæricæ (lingua Russica), [E]. [108.
— Casan. Relationes (2), II; p. 94—

315. Suslow G. Trigonometria cinematica, [M]. (lingua Russica).
— Kijov. Relationes, XXXII; p. 1—7.

316. Tilly (de) J. Essai de Géométrie analytique générale, [F].
— Belgique, Mém. Couronnées; XLVII; 80. p.
— Mathesis — 1893 — Appendix.
— Bruxelles, F. Hayer, 1893; 80. p.

317. Woolsey J. W. A case of non-euclidean geometry, [P].
— New York Society, Bull. II; p. 158—161.

1893.

318. Beltrami E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. (Translatio Russica operis sub No. 46 laud. a *Mey* confecta), [D].
— Casan. Relationes (2), III; Appendix.

319. id. Sugli spazî di curvatura costante (Translatio Russica operis sub No. 47 laud. a *Mey* confecta), [D].
— Casan. Relationes (2), III; Appendix.

320. Bianchi L. Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in poliedri regolari, [P].
— Lincei, Rend., (5), II; p. 66—72.

321. id. Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici, [P].
— Ann. Mat. (2), XXI; p. 236—288.

322. Gérard L. Sur la géométrie non Euclidienne, [E].
— Nouv. Ann., (3), XII; p. 74—84.

323. Helmholtz H. Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie (Translatio Russica operis sub No. 49 laudati, a *Wassilieff* confecta), [G].
— Casan. Relationes (2), III; Appendix.

324. Kagan B. Adumbratio systematis geometrici *Lobatschefskii* (lingua Russica), [E].
— Spaczinski, Relationes (Vjestnik, Odessa) No. 174, 178, 179, 183, 187—190, 194—196, 198, 199, 210.

325. Killing W. Zur projectiven Geometrie, [P].
— Math. Ann., XLIII; p. 569—590.

326. id. Einführung in die Grundlagen der Geometrie, [C].
— Paderborn, Schöningh; I. Bd; VIII+357. p.
327. KLEIN F. Höhere Geometrie, [G, P].
— (Prælectiones lithogr.), Bd. I, II; Göttingen.
328. id. Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie (Edit. sec.) [C].
— (Prælectiones lithogr.), Göttingen.
329. id. A comparative rewiev of recent researches in geometry. (Translatio Anglica operis sub No. 88 laudati, a *Haskell* confecta), [G].
— New York M. S. Bull. II; p. 215—249.
330. JONSON W. A case of non-euclidian geometry, [P].
— New-York M. S. Bull., II; p. 158—161.
331. LIE S. Bemerkungen zu v. *Helmholtz'* Arbeit etc. (Translatio Russica operis sub No. 231 laudati, a *Sintsoff* confecta), [G].
— Casan. Relationes (1), III; Appendix.
332. id. Theorie der Transformationsgruppen, [G].
— Bd. III, V. Abtheilung, Kap. 21, 22, 23, 24; p. 437—543.
— Leipzig, B. G. Teubner.
333. OVIDIO (d') E. Su varie questioni di metrica proiettiva, [P].
— Torino Atti, XXVIII; p. 566—589.
334. POINCARÉ H. Sur les hypothéses fondamentales de la géométrie. (Translatio Russica commentationis sub No. 240 laud., a *Sintsoff* confecta.)
— Casan. Relationes, (2), III, Appendix.
335. RIEMANN B. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Translatio Russica operis sub No. 53 laud. a *Sintsoff* confecta.)
— Casan. Relationes, (2), III; Appendix.
336. SCHMIDT H. Geometrische Untersuchungen, [E].
— Jour. f. reine u. ang. Math., CXII; p. 112—139; p. 319—348.
337. SCHÜLLER Fr. W. Der Satz von der Winkelsumme in Dreieck, oder das XI. Axiom des Euklid, [E].
— München. Im Selbstverlage des Verf.; 30 p.
338. SEMIKOLENOW G. Studien über die Geometrie von Lobatschefsky, [E.]
— Libau, Teil I; LXI+48 p.
339. SIMON M. Zur Volumenbestimmung in der Lobatschefsky'schen Geometrie, [E].
— Math. Ann. XLII; p. 471—484.
340. SUSLOW G. Kinetogeometrische Interpretation dreifach ausgedehnter Räume constanter Krümmung, [M).
— Ber. d. phys. math. Gesellschaft zu Kiew.
— Kiew, Nachrichten; p. 1—57.

341. Tarry G. Géométrie générale. Mesure des arcs des courbes, etc.
— Ass. Franç., XXII; p. 217—236.

1894.

342. Bianchi L. Lezioni di geometria differenziale.
— Cap. II; Cap. XVII, [D].
— Pisa, Spoerri; Cap. II, p. 35—37; Cap. XVII, p. 396—415. (Vide translationem sub No. 501.)

343. Cayley A. Non Euclidian geometry, [P].
— Cambridge Trans., XV; p. 391—402.
— Math. Papers, t. XIII; No. 951, p. 480—504.

344. Cesàro E. Sulla geometria intrinseca degli spazi curvi, [P].
— Napoli, Atti, (2), VI; 10 p.

345. id. Introduzione alla teoria matematica della elasticità. Cap. XXI, [M].
— Torino-Bocca, p. 183—213.

346. Darboux G. Leçons sur la theorie générale des surfaces — Livre VII — Chap. XIV, [D].
— Paris, Gauthier Villars, T. III; p. 471—501.

347. Dressler H. Grundsatz oder Lehrsatz, [E].
— Zeitschr. f. math. Unter.; XXV; p. 498—503.

348. Enriques F. Sui fondamenti della geometria proiettiva, [P].
— Rend. Ist. Lombardo (2), XXVII; p. 550—567.

349. id. Conferenze di geometria, [D, P].
— Bologna, Lezioni litografate; 136 p.

350. Halsted G. B. Non-Euclidean Geometry, historical critical and expository, [C].
— The American Math. Montly, I; p. 70—72, 112—115, 149—152, 188—191, 222—223, 259—260, 301—303, 345—346, 421—423, 837, 973.

351. Mansion P. Principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann, [E].
— Report of the Brithish Ass., Oxford.

352. id. Sur le principe fondamental de la géométrie de Riemann, [E].
— Mathésis (2), IV; p. 180—183.

353. Palatini F. Sull' assioma delle parallele; sulla definizione del piano e sull' uguaglianza delle figure, [E].
— Periodico di Mat., IX; p. 7—14.

354. Peano G. Sui fondamenti della geometria, [E].
— Rivista di Mat., IV; p. 51—90.

355. Philippow M. Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum, [E].
— Wissenschaftl. Revue, Nr. 15, 19, 22, 24, 25, 27, 28.

356. Reishaus T. Zur Parallelenfrage, [E].
— Programm. (Nr. 147.) Gymnasium Stralsund. — 14. p.

357. Semikolenow G. Studien über die Geometrie von Lobatschefsky, [E].
— Libau, II. Theil; IV + 104 p.

358. Sikstel W. Theoremata fundamentalia

— Pisa, Annali Scuola Normale, VII; 100 p.

374. HADAMARD J. Sur la géométrie non euclidienne.
— Bordeaux, Procés verbaux 1895—1896; p. 24—25.

375. HALSTED G. B. Non-Euclidean Geometry, historical and critical expository, [C].
— The American Math. Montly, II; p. 10, 42—43, 67—69, 108—109, 144—146, 181—214, 256—257, 309—313, 346—348.

376. HELMHOLTZ H. Sur les faits qui servent de base à la géométrie. (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 49 laudati, a *Houël* confecta), [G].
— Paris, Hermann.

377. HILBERT D. Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, [F].
— Math. Ann., XLVI; p. 91—96. (Vide translationem sub No. 568.)

378. KAGAN B. Note sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire, [E].
— Nouv. Ann., (3), XIV; p. 251—258.

379. id. Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la géométrie de l'espace de courbure constante negative, [E].
— Nouv. Ann., (3), XIV; p. 20—30.

380. id. Adumbratio systematis geometrici *Lobatschefskii* (lingua Russica) [E].
— Spaczinski, Relationes; No. 202, 203, 206, 207, 209, 214, 216, 222, 234.

381. id. Disquisitiones de geometria superficierum curvaturæ constantis ac negativæ (lingua Russica), [D].
— Casan. Relationes, (2), V; p. 111—140, 145—184.

382. KOENIGS G. La géométrie réglée et ses applications. Cap. V: Géométrie Anallagmatique, [P].
— Paris, Gauthier-Villars.

383. LACHTIN L. K. De interpretatione quadam manifesta planimetriæ *Lobatschefskianae* (lingua Russica).
— Moscoviæ, Collect. mathem. XVII; p. 767—790.

384. MANSION P. Sur la métagéométrie et ses subdivisions, [E].
— Belgique Bull., (3), XXIX; p. 495—498.

385. id. Relation entre les distances de cinq ou six points en géométrie non euclidienne, [F].
— Brux. S. sc., XIX. B; p. 189—196.

386. id. Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann. Essai d'exposition élémentaire, suivi d'un appendice sur l'histoire et la portée philosophique de la métagéométrie, [E].
— Paris, Gauthier-Villars; 24 p.

387. id. Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann. [E].

— Congrès sc. intern. des Cath. VII; p. 11—25.
— Mathésis, (2), V, Suppl. II; p. 8—21.

388. id Sur les premiers principes de la métagéométrie et de la géométrie Riemannienne, [E].
— Mathésis, (2), V; p. 63—64.

389. PIERI M. Sui principii che reggono la geometria di posizione, [P].
— Torino, Atti, XXX; p. 607—641.

390. RICCI G. Sulla teoria degli iperspazii, [D].
— Lincei, Rendiconti, (5), IV; p. 232—237.

391. RIEMANN B. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 53 laudati, a *Houël* confecta) [D].
— Paris, Hermann.

392. id On the hypotheses which lie at the bases of geometry. (Translatio Anglica operis sub No. 53 laudati, a *Halsted* confecta.) [D].
— Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, VII; 1895—96; p. 65—78.

393. TARRY G. Géométrie générale — Les droits et les plans.
— Ass. Franç., XXIII; p. 184—195.

394. TILLY (de) J. M. Rapport sur cette note, [E].
— Mathésis, (2), V; Suppl. V; p. 16.
— Brux. S.sc., (2), XIX, A; p. 45—46.

395. VALLÉE-POUSSIN (de la). Sur la géométrie non euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), Suppl. V; p. 6—15.
— Brux. S.sc., (2), XIX, B; p. 17—26.

1896.

396. BANAL R. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due uguali, [D].
— Ann. Mat., (2), XXIV; p. 213—240.

397. BIANCHI L. Sulle superficie a curvatura nulla, in geometria ellittica, [D].
— Ann. Mat., (2), XXIV; p. 93—129.

398. BURALI-FORTI C. Il metodo di Grassmann nella Geometria proiettiva (Nota 1), [P, V].
— Palermo, Rend., X; p. 177—195.

399. DAUGE F. Sur la géométrie non Euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), VI; p. 7—13.

400. GUICHARD. Sur les surfaces minima non euclidiennes, [D].
— Ann. École Norm., (3), XIII; p. 401—414.

401. HALSTED G. B. Non-Euclidean Geometry, historical and critical expository, [C].
— American Math. Montly, III; p. 13—14, 35—36, 67—69, 109, 132—133.

402. KLEIN F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. (Translatio Russica operis sub No. 88 laudati, a *Sintsoff* confecta), [G].
— Casan. Relationes, (2), V, 1895—96; 16 p.; (2), VI, 1896; 28 p.

403. LECHALAS G. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide, [E].
— Brux. S. sc., XX; p. 167—177.
— Mathésis, VII; Supplément.

404. LOEWY A. Über die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst, mit Anwendungen auf Linien- und Kugelgeometrie, [P].
— Nova Acta Acad. Cesareæ Leopoldino-Carolinæ Germanicæ ..... Halle, LXV; p. 1—66.

405. MANSION P. Le plan riemannien est-il identique à la sphère euclidienne, [E].
— Brux. S. sc., XX.

406. id. Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne, [F].
— Brux. S. sc., XX, A; p. 62—63.

407. id. Premiers principes de la Métagéométrie ou géométrie générale, [E].
— Mathésis, (2), VI; Suppl. p. 47.
— Revue néoscolastique, III; p. 143—170, 242—259.
(Vide translationem sub No. 438).

408. id. Teoria succinta de las funciones hiperbolicas, [E].
— Arch. de Matematicas puras y Aplicadas, I; p. 29—34, 46—50, 65—71, 86—88, 106—108, 125—127, 150—153, 170—172, 191—192, 211—213.

409. id. Sur la non identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne, [E].
— Brux. S. sc., XX, B; p. 167—177, 178—182.
— Mathésis, (2), VII; supplément; p. 12—16; 187.

410. MINKOWSKI H. Geometrie der Zahlen, [F].
— Leipzig, B. G. Teubner.

411. MÜLLER E. Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume, nach Grassmann'schen Principien, [V].
— Monatsh. f. Math; VII.

412. NEKRASSOW P. A. De rationibus algebraicis in quæstionibus geometricis solvendis (lingua Russica), [E].
— Moscoviæ, X+262 p.

413. PIERI M. Sui principi che reggono la geometria di posizione, [P].
— Torino, Atti, XXXI; p. 381—399; 457—470.

414. RAY (van) J. Sur une formule de la géométrie non-euclidienne, [E].
— Nieuw Arch. voor Wiskunde, (2). III; p. 77—79.

415. SIKSTEL W. Théorèmes fondamentaux de la géométrie spherique, [E]. (Translatio Franco-Gallica comm. sub No. 358 laud.)
— Arch. d. Math. u. Phys., (2), XV; p. 159—171.

416. id. De consecutionibus axiomatis XI, (lingua Russica), [E].
— Collectanea pædagogica, VI; p. 533—545.

417. STUDY E. Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, [P, G].

— Leipzig, Berichte, XLVIII; p. 649—664.
418. TRAUB K. Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie, [E].
— Lahr, M. Schauenburg; 12 p.

1897.

419. AMODEO F. A proposito dei postulati della geometria proiettiva, [P].
— Gior. Mat., XXXV; p. 101—103.
420. id. Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques, [M].
— Comptes Rendus. CXXV; p. 394—396.
421. BANAL R. Sugli spazii a curvatura costante, [D].
— Lincei, Rend., (5), VI; p. 357—362.
422. BERZOLARI L. Un' osservazione sull' estensione dei teoremi d' Eulero e Meusnier agli iperspazii, [D].
— Lincei, Rend., (5), VI; p. 283—290.
423. id. Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque, [D]
— Torino, Atti, XXXIII; 1897—98; p. 692—700; p. 759—778.
424. BIANCHI L. Sugli spazî a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, [G, D].
— Mem. Soc. Ital., (3), XI; p. 267—352.
425. BOLYAI J. Scientia spatii absolute vera — A tér absolut igaz tudománya; edd. *Suták* J. et *Schmidt* F. (Text. orig., translatio hungarica, commentarium, vita auctoris.)
— Budapest, Kilian, XXVIII + 143 p.
426. id. A térnek absolut igaz tudománya. (Scientia spatii absolute vera.) (Translatio hungarica, ab I. *Rados* confecta.)
— Mathematikai és Physikai Lapok, Budapest. T. VI; p. 147—192.
427 BURALI-FORTI C. Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva, IIa Nota, [V].
— Palermo, Rend., XI; p. 64—82.
428. ENGEL Fr. De parallela construenda secundum geometriam non-Euclideam (lingua Russica), [E].
— Casan. Relationes, (2), VII; p. 118—121.
429. FONTENÉ M. G. Géométrie dirigé, [P].
— Paris, Nony; 83 p.
430. HADAMARD J. Sur le billard non-euclidien.
— Bordeaux, Procés Verbaux; p. 147—149.
431. HALSTED G. B. Non-Euclidean Geometry, historical expository, [C].
— American Math. Montly, IV; p. 10, 77—79, 101—102, 170—171, 200, 247—249, 269—270, 307—308.
432. HINTON C. H. Hyperbolea and the solution of equations, [E].
— American M. S. Bull., (2), III; p. 307—321.
433. KLEIN F. Mathematical Theory of the Top., [M].
— New-York, Scribners's Sons, VI + 74 p.

434. KLEIN-FRICKE. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, [P].
— I Bd. Leipzig, Teubner, p. 3—57.
435. KLEIN F. Sur la géométrie dite non euclidienne. (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 77 laud. a *Laugel* confecta), [P].
— Toulouse, Ann. XI; p. 1—62.
436. LOBATSCHEFSKY N. The introduction to Lobachévski's New elements of geometry. (Translatio anglica, a *Halsted* confecta), [E].
— Texas Academy of Science; p. 17.
437. LOBATSCHEFSKY N. Introduction to the New principles of Geometry with a complete theory, of paralleles. (Translatio Anglica, a *Halsted* confecta), [E].
— Austin, Texas, 27 p.
438. MANSION P. Prémiers principes de la Métagéométrie. (Translatio Polonica operis sub No. 407 laud., a *Dickstein* confecta), [E].
— Wiadomosci Math. I; p. 1—23; 68—91.
439. id. Sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non-euclidienne, [E].
— Mathésis, Supp., VII; p. 2.
440. id. Expression analytique du volume d'un corps en géométrie non-euclidienne, [E].
— Brux. S. sc., XXI, A; p. 118—119.
441. id Pour la géométrie non-euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), VII; p. 33—43.
442. id. Note de géométrie non-euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), VII; p. 158—161.
443. id. Relation entre les distances de cinq ou six points en géométrie non-euclidienne, [F].
— Mathésis, Suppl., VII; p. 7.
444. id. Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non-euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), VII; p. 112—117, 134—139, 158—161.
— Bruxelles, S. sc., XXI, A; p. 117—118.
445. NASIMOW P. Definitio plani quale Lobatschefskij descripsit (lingua Russica), [E].
— Casani, Acta Universitatis, II; p. 1—4.
446. PIERI M. Intermezzo, [P].
— Periodico di Mat., XII; p. 151—153.
447. id. Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta, [P].
— Torino, Atti, XXXII; p. 343—351.
448. REYES Y PRÒSPER. Nota sobre un punto de geometria non-euclidea, [P].
— Archivo de Mat., II; p. 44—47.
449. id. Note sur le théorème de Pytagore et la géométrie non-euclidienne, [E].
— Kasan, Bull., (2), VII; p. 67—68.
450. id. Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide, [E].

— Mathésis, (2), VII; p. 86.

451. Scott C. A. On Cayley's theory of the absolute, [P].
— American M. S. Bull., (2), III; p. 235—246.

452. Simon M. Zwei Sätze zur nicht-Euclidischen Geometrie, [E].
— Math. Ann., XLVIII; p. 607.

453. Sikstel V. Théorèmes fondamentaux de la géométrie spherique. (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 358 laudati), [E].
— Archiv. d. Math. u. Phys., (2), XV; p. 403—420.

454. Story W. E. Hyperspace and Non-Euclidian Geometry, [E].
— Mathematical Review, I; p. 169—184.

455. Thomae J. Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung, [P], — (p. 160—172).
— Halle, L. Nebert, VIII+181 p.

456. Veronese G. et Gazzaniga. Elementi di geometria. Libro primo, [E].
— Padova, Drucker; Libro primo, p. 7—33.

457. Zeuthen H. G. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective, [P].
— Comptes Rendus, CXXV; p. 638—640.

458. id Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, [P].
— Comptes Rendus, CXXV; p. 858—859.

1898.

459. Alexejewsky W. P. De definitione longitudinis in geometria non-Euclidea (lingua Russica), [E].
— Charcoviæ, Relationes Societatis Mathematicæ, (2), VI; p. 139—153.

460. Andrade J. Statique non euclidienne. (Verhandlungen des Ersten internationalen Math. Kongresses in Zürich 1897), [M].
— Leipzig, Teubner; p. 251—253.

461. id. Le groupe d'équivalence et se bases cinématiques, [M].
— Comptes Rendus, CXXVI; p. 1775—1777.

462. id. Leçon de Mécanique Physique, [M].
— Paris, Société d'éditions scientifiques; — Note II; p. 360—391.

463. Banal R. Sugli spazii a curvatura costante, [D].
— Lincei, Rendiconti, (5), VII; p. 7—15.

464. Barbarin P. Géométrie générale des espaces, [P].
— Ass. Franç., II; p. 111—132.

465. Berry B. On the evaluation of a certain determinant wich occurs in the mathematical theory of statics and in that of elliptic geometry of any number of dimensions, [M].
— Cambridge, Proc. Phil. Society, IX; p. 2—10.

466. Berzolari L. Ancora sull' estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazii, [D].

— Lincei, Rend., (5), VII; p. 4—6.

467. BIANCHI L. Sulla applicabilità di due spazî con la medesima curvatura di Riemann costante, [D].
— Lincei, Rend., (5), VII; p. 147—155.

468. BURNSIDE W. The construction of the Straight Line joining two given points, [E].
— London, M. S. Proc., XXIX; p. 125—132.

469. CASSANI P. Sui fondamenti della geometria. — Considerazioni e proposte, [E].
— Atti del R. Istituto Veneto, X; p. 42—60.

470. DAUGE F. Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemanienne, [E].
— Mathésis, (2), VIII; p. 5—20.

471. id. Sur la limite vers laquelle tend un certain triangle Lobatscheffskien, [E].
— Mathésis, (2), VIII; p. 267—272.

472. ENGEL F. Zur nichteuklidischen Geometrie, [E].
— Leipzig, Berich., L; p. 181—191.

473. ENRIQUES F. Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni, [D].
— Palermo, Rend., XII; p. 222—239.

474. FANO G. Lezioni di Geometria non-Euclidea, [G].
— Università di Roma, lezioni litografate, 271 p.

475. FONTENÉ M. G. Métrique aninvolutive, [P].
— Bull. S. M. F. XXVI; p. 176—194.

476. HALSTED G. B. Non-Euclidean Geometry, historical expository, [C].
— American Math. Montly, V; p. 1—2, 67—68, 127—128, 290—291.

477. HESS E. Über eine anschauliche Darstellung der regelmässigen Einteilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes.
— Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturw. zu Marburg. p. 89—108.

478. KAGAN B. Adumbratio systematis geometrici Lobatschefskii (lingua Russica), [E].
— Spaczinski, Relationes No. 269, p. 120—126; No. 270, p. 150—153.

479. KILLING W. Einführung in die Grundlagen der Geometrie, [C].
— Paderborn, Schöningh; II Bd.; p. IV+361.

480. MACAULAY F. S. Cayley's theory of the absolute, [P].
— Math. Gazette, XIII; p. 155—158.

481. MANSION P. Pour la Géométrie non-euclidienne, [E].
— Mathésis, (2), VIII; p. 33—43.

482. id. Pour la Géométrie non-euclidienne suivi de diverses notes, [E].
— Gand. Ad. Hoste.

483. id. Mélanges de géométrie euclidienne et non-euclidienne, [E].
— (Sine designatione loci), 14 p.

484. MÜLLER E. Die Geometrie orientier-

1899.

501. BIANCHI L. Vorlesungen über Differentialgeometrie. (Translatio Germanica operis sub No. 342 laudati, a *Lukat* confecta), [D].
— Leipzig, Teubner. — Kap. II, p. 35—58; Kap. XVI, p. 418—439. Kap. XXI, p. 563—599; Kap. XXII, p. 600—640.

502. BIANCHI L. Alcune ricerche di geometria non-euclidea, [D].
— Ann. Mat., (3), II; p. 95—126.

503. BOLYAI J. Responsio ad quæstionem . . . ab Inclyta Societate Sc. Jablonowskiana Lipsiæ anno 1837 motam; edd. *P. Stäckel*.
— Mathem. és természettud. Értesitő XVII et Mathem. und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn XVI; p. 281—297.

504. COLLIGNON E. Note sur l'existence géométrique du rectangle, [E].
— Ass. Franç., XVIII; p. 87—99.

505. COTTON E. Sur les variétés à trois dimensions, [D].
— Toulouse, Ann., (2), I; p. 385—438.
— Paris, Gauthier-Villars; 61. p.

506. DE FRANCESCO D. Alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico a tre dimensioni di curvatura costante, [M].
— Napoli, Atti, X; 1899—900.

507. id. Sopra alcune formule di Geometria non-Euclidea, [E].
— Gior. Math., XXXVII; p. 98—106.

508. id. Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante, [M].
— Torino, Atti, XXXV; p. 34—38; p. 231—243.

509. ENGEL Fr. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnis Lobatschefskij's und 194 Fig. II. Teil: Anmerkungen über Lobatschefskys Leben u. Schriften.
— Leipzig, Teubner; I. Teil XVI+235 p.; II. Teil, p. 236—467.

510. FROLOV M. Note sur la géométrie non-euclidienne, [E].
— Ass. Franç., XXVII; p. 70—72.

511. GIUDICE F. Sulla metrica degli spazî a curvatura costante, [E].
— Torino, Atti, XXXV; 1899—1900; p. 119—144.

512. HALSTED G. B. Elementary Synthetic Geometry.
— New-York, J. Wiley; VII+164 p.

513. HAUSDORFF F. Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie, [E, P].
— Leipzig, Ber., LI; p. 161—214.

514. HILBERT D. Grundlagen der Geometrie, [E]. — Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.
— Leipzig, Teubner; p. 1—92.
— (Vide translationes sub Num. 546, 593.)

515. LE VAVASSEUR R. Les systèmes de sphères et l'espace non-euclidien à quatre dimensions, [P].
— Toulouse, Bull. Acad., II; p. 71—87.

516. LOBATSCHEFSKIJ N. Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles. (In sermone Franco-Gallico *Mallieux* vertit), [E].
— Liège, Mem., (3), II; 101 p.

517. LOBATSCHEFSKIJ N. J. Über die Anfangsgründe der Geometrie, p. 1—66.
— Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien, p. 67—236. (In sermone Germanico *Engel* vertit), vide sub No. 509.

518. MANSION P. Équation des horicycles et des horisphères en géométrie Lobatschefskienne, [E].
— Brux., S. sc., XXIII, A; p. 32—33.

519. id. Quelques proprietés d'un espace (analytique) Lobatschefskien à cinq dimension, [E].
— Brux. S. sc., XXIII, A; p. 5.

520. PIERI M. Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto, [E].
— Torino, Mem, (2). IL; p. 173—222.

521. RAZZABONI A. Le formule del Frenet in geometria iperbolica e le loro principali applicazioni, [D].
Bologna, Gamberini, p. 22.

522. RICCI G. Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni, [G].
— Memorie Soc. Ital., (3), XII; p. 69—92.

523. RUDERT E. Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann's Ausdehnungslehre, [V].
— Programmabhandlung No. 604; III. Realsch.; Leipzig, 44 p.

524. SCHLESINGER L. Über projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen, [D].
— Jour. f. reine u. ang. Math., CXXI; p. 168—176.

525. id. A Gauss-féle Pentagramma mirificum, [D].
— Mathem. és Term. Értesitő XVII; p. 526—534.
— Idem Germanice: Über das Gauss'sche Pentagramma mirificum.
— Journal für r. u. ang. Mathematik CXXIV; p. 38—46.

526. SIMON M. Die Geometrie der Zwischenebene (und der Grenzfläche), [E].
— Deut. Math. Ver., VII; p. 67—76.

527. STRINGHAM J. On the Fundamental Differential Equations of Geometry.
— Report of the British Association; p. 646—647.

528, TEDONE O. Sulla teoria degli spazî a curvatura costante, [D].
— Istituto Lombardo, Rend., (2), XXXII; p. 592—609.

529. TILLY (de) J. Démonstration générale

du seconde théorème de Legendre, [E].
— Mathésis, (2), IX; p. 5—9.

530. id. Sur la somme des angles dans un triangle, [E].
— Mathésis, (2), IX; p. 265—266.

1900.

531. BARBARIN P. Études de Géométrie non-Euclidienne, [E].
— Belgique, Mémoires couronnés, LX; 167 p.

532. BIANCHI L. Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante, [D].
— Ann. Math., (3), IV; p. 1—66.

533. id Sulla integrazione della equazione $\Delta_2\ u = 0$ nello spazio indefinito non euclideo, [D].
— Lincei, Rendiconti, (5), IX; p. 333—343.

534. BLICHFELDT H. F. On a certain class of groups of transformation in space of tree dimensions, [G].
— American Jour., XXII; p. 113—120.

535. BONNESEN T. Bemærkninger om en Hovedsettning i den elementære Plangeometrie, [E].
— Tidsskrift for Mat. VI; p. 25—32.

536. BONOLA R. Sulla introduzione degli elementi improprii in geometria proiettiva, [P].
— Gior. Mat. XXXVIII; p. 105—116.

537. id. Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee. Articolo VI delle «Questioni riguardanti la geometria elementare»: p. 143—222.
— Bologna, N. Zanichelli.

538. DE FRANCESCO D. Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante, [M].
— Lincei, Rendiconti, (5), IX: p. 245—252.

539. id. Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante, [M].
— Napoli, Rendiconti, (3), XXXIX; p. 15—16; p. 153—155.

540. id. Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario, [M].
— Napoli, Rendiconti, (3), VI; p. 28—38.

541. DEHN M. Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, [E].
— Math. Ann., LII; p. 404—439.
— Leipzig, G. B. Teubner; 38 p.

542. EFIMOV M. Les séries dans la pangéométrie, [E].
— Nouv. Ann., (3), XIX; p. 28—31.

543. FROLOV M. Considérations sur la géométrie non-euclidienne.
— Enseignement Math., II; p. 179—189.

544. id. Considérations nouvelles sur la géométrie non-euclidienne.

— Enseignement Math., II; p. 293—297.

545. Fubini G. Il parallelismo di Clifford negli spazî ellittici, [E].
— Pisa, Ann. Scuola Norm. IX.

546. Hilbert D. Les principes fondamentaux de la géométrie. (Translatio Franco-Gallica operis sub No. 514 laudati, a *Laugel* confecta cum annotationibus auctoris) [E].
— Ann. École Norm., (3), XVII; p. 103—209.
— Paris, G. Villars; 114. p.

547. Kölmel F. Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projectiver Massbestimmung. Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie.
— Lahr, O. Schauenburg & Co.; VI+99 p.

548. Petersen J. Géométrie des droites dans l'espace non-euclidienne, [P].
— Danemark, Bull. Acad. Royale: p. 308—330.

549. Sabinin E. De theoremate, quod ad summam angulorum trianguli geodætici in superficie, quæ constantis est curvaturæ, contenti spectat, per calculum variationum demonstrando (lingua Russica).
— Moscoviæ, Collectanea Mathem. XXI; p. 54—61.

550. Servant. Sur quelques applications de la géométrie non-euclidienne, [D].
— Comptes Rendus, CXXXI; p. 821—830.

551. Sikstel V. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphèrique, [E].
— Archiv d. Math. u. Phys., XVII; p. 337—353.

552. Sommer. Hilbert's foundations of Geometry. [E].
— American M. S. Bull., VI.

553. Stecker H. F. Non-Euclidean Properties of Plane Cubic, [P].
— Am. Journ., XXII; p. 31—40.

554. Stringham J. A proof of the Directro-Focal Property of the Plane Section of a Cone in non-Euclidean Space, [P].
— London, M. S. Proc., XXXII; p. 308—311.

555. Study E. Über nichteuklidische und Linien-Geometrie; in opere: Festschrift... zu der fünfzigjährigen Doctor-Jubelfeier von *H. Limpricht*, [P].
— Greifswald, F. W. Kunike, 31 p.
— denuo editum in: Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, XI (1902), p. 313—340.

556. Thieme H. Die Umgestaltung der Elementargeometrie, [E].
— Programm. Berger-Oberrealschule, Posen, 40 p.

557. Veltmann W. Geometrische Sätze über die Fläche und die Winkelsumme des Dreiecks und des Vierecks, [E].
— Arch. der Math. und Phys., (2), XVII; p. 442—448.

558. WOODS F. S. Lobatchevsky's Geometry, [E].
— American M. S. Bull.

1901.

559. BARBARIN P. Sur le paramètre de l'Univers., [E].
— Bordeaux, Procès-Verbaux.

560. id. Le cinquième livre de la Métagéométrie, [E].
— Mathésis, (3), I.

561. id. Sulla utilità di studiare la geometria non-euclidea.
— Le Mat. pure ed appl. I; p. 85—87.

562. BIANCHI L. Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazî di curvatura costante, [D].
— Ann. Mat., (3), V; p. 165—219.

563. BLASER L. Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, [P].
— Math. Ann., LV; p. 293—300.

564. BOLYAI J. Vizsgálatok az absolut geometria köréből *Bolyai János* hátrahagyott irataiban, *Stäckel Pál*-tól,
— Mathem. és Term. Értesitő XX; p. 160—186.
Idem Germanice: Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus *J. Bolyai's* Nachlass herausgegeben von *P. Stäckel*,
— Math. und naturw. Berichte aus Ungarn XVIII; p. 280—307.

565. BONOLA R. Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio; iperbolico, parabolico, elittico, [P].
— Palermo, Rend., XV; p. 56—65.

566. HADAMARD J. Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions, [D].
— Bull. Sc. Math., XXV; p. 37—40.

567. HAMEL G. Über die Geometrieen in denen die Geraden die kürzesten sind, [E].
— Inaugural-Dissertation, Göttingen; 90 p.

568. HILBERT D. Sur la ligne droite regardée comme étant le plus court chemin d'un point à un autre. (Translatio Franco-gallica operis sub No. 377 laudati), [F].
— Enseignement Math., III; p. 194—200.

569. id. Über Flächen von constanter Gaussscher Krümmung, [D].
— Transactions of the American Math. Society, II; p. 86—99.

570. KAGAN B. De fundamentis geometriæ (lingua Russica).
— Spaczinszki, Relationes; p. 175—185.

571. KIRÁLY H. Az állandó görbületű felületeken érvényes geometriáról. (De geometriæ superficierum curvaturæ constantis ac negativæ.)
— Mathematikai és Physikai Lapok, (Budapest) X p. 111—144.

572. KOMMEREL K. Die nichteuklidische Geometrie und die Trigonometrie auf den Flächen von constantem Krümmungsmass, [D].
— Math. nat. Mitteilungen. Württemberg, (2), III; p. 18—31.

573. LIEBMANN H. Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nicht-euklidischen Geometrie aus den drei Winkeln, [E].
— Leipzig, Berich., LIII; p. 477—491.

574. LOBATSCHEFSKIJ N. Nouveaux principes de la géométrie, avec une théorie complète des parallèles, [E]. (Translatio Franco-Gallica, a *F. Mallieux* confecta; cf. Nr. 210, 517.)
— Mémoires de Liège; (3), II (1900), III (1901); Gand, Hoste.

575. LOVETT M. Sur la géométrie à n dimensions, [G].
— Journ. Math. purs et appliquées, VII; p. 259—303.

576. MANSION P. Sur les pseudogéométrices de Cayley et de Lie.
— Ann. Soc. Bruxelles, XXV. p. 144—145.

577. MANNING H. P. Non-Euclidean Geometry, [E].
— Boston, U. S. A.; Ginn & Company.

578. MOORE E. H. On the projective axiome of geometry.
— Transact. Am. Math. Soc. III; p. 142—158.

579. PETERSEN J. Bitrag til en syntetisk Fremstelling of den ikke-euklidiske Geometrie.
— Tidsskrift for Mat. XII; p. 53—70; 73—89.

580. SCHUR F. Über die Grundlagen der Geometrie, [P].
— Math. Ann., LV; p. 265—292.

581. STUDY E. Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie, [P].
— Leipzig, Berich., LIII; p. 338—403.

582. TILLY J. (de). Sur une trigonométrie non symétrique.
— Ann. Soc. Bruxelles XXVI; p. 109—114.

583. WASTEELS C. E. Théorèmes de metagéométrie.
— Mathésis, (3), I; p. 265—267.

584. WICKERSHEIMER E. Sur le postulatum des parallèles.
— L'Enseignement, III; p. 384.

1902.

585. BARBARIN P. La géométrie non euclidienne, [E].
— Paris, C. Naud.; 79 p.

586. BIANCHI L. Lezioni di geometria differenziale, II-a edizione riveduta ed aumentata, [D].
— Pisa, Spoerri. Vol. I; Cap. II; p. 54—83; Cap. XI, XII, XIII, XIV; p. 386—516.

587. id. Sui simboli a quattro indice e sulla curvatura di Riemann.
— Lincei, Rendiconti (5) X; p. 3—7.

588. BONNESEN T. Analytiske Studier over Ikke-Euklidisk Geometrie, [D].
— Dissertatio inauguralis, København.

589. BOLYAI J. B. J. észrevételei *Lobatschefskij Miklós*nak a Parallelákra vonatkozó vizsgálataira, ismertetik *Stäckel Pál* és *Kürschák József*.

— Mathem. és Term. Értesitő XX; p. 40—67.
Id. Germanice: Bemerkungen über *Nikolaus Lobatschefsky's* «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Ein Bericht erstattet von *J. Kürschák* und *P. Stäckel.*
— Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn XVIII; p. 250—279.

590. Burali-Forti. Il metodo di Grassmann in Geometria Proiettiva. Nota III. [V].
— Palermo, Rendiconti XV; p. 310—320.

591. De Francesco D. Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante, [M].
— Math. Ann., LV; p. 573—584.

592. Hilbert D. Über die Grundlagen der Geometrie, [E].
— Gött. Nachr.
— Math. Ann. LXVI; p. 381—422.

593. id. The foundation of Geometry, [E]. (Translatio Anglica operis sub No. 514 laud. a *E. J. Townsed* confecta.)
— Chicago, Open Court publishing Company; 132 p.

594. Laurent H. Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie.
— Paris; C. Naud; 68 p.

595. Liebmann H. Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der LobatschefskijschenGeometrie, [E].
— Leipzig. Berich. LIV; p. 244—260.

596. Lobatschefskij N. Pangeometrie. (Translatio Germanica operis sub No. 22 laud. ab *H. Liebmann* confecta.)
— Leipzig, Engelmann; 95 p.

597. Kagan B. Ein System von Postulaten, welche die euclidische Geometrie definiren, [E].
— Deutsch. Math. Ver. XI; p. 403—424.

598. Moore E. H. On the projective axioms, [P].
— Trans. Am. Math. Society III; p. 142—158.

599. Stäckel P. Zur nicht-euklidischen Geometrie, [E].
— Archiv. d. Math. u. Phy. (3), IV; p. 187—188.

600. Stringham J. Orthogonal transformation in Elliptic, or in Hyperbolic space.
— Comptes Rendus du deuxième congrès international des Math. tenu à Paris 1900, p. 327—338.
— Paris, Gauthier-Villars.

601. Study E. Ein neuer Zweig der Geometrie, [P].
— Deutsch. Math. Ver. XI; p. 97—123.

602. id. Nachtrag zu dem Aufsatze «Über nichteuklidische und Liniengeometrie».
— Deutsch. Math. Ver., XI; p. 340—342.

603. VAHLEN K. Th. Über Bewegungen und complexe Zahlen, [V].
— Math. Ann., LV; p. 585—593.

604. WASTEELS C. E. Théorèmes de metagéométrie relatifs aux médianes d'un triangle.
— Mathesis, (3), p. 39—42.

605. WOODS F. S. Space of constant curvature, [D].
— Annals of Mathematics (Cambridge Mass. U. S. A.), (2), III; p. 71—72.

ADDENDA.

1849.

606. KNORR E. Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie, [E].
— Kiew, V+51 p.

1897.

607. KOMMERELL K. Die Krümmung der zwei dimensionalen Gebilde im ebenen Raume von vier Dimensionen, [D].
— Inaugural-Dissertation; Tübingen, 35 p.

Libelli, qui ad areas terminate aequales attinent.

1890.

608. RÉTHY M. Végszerűen egyenlő területek.
— Math. és Term. Értesitő VIII; p. 176—202.
Idem Germanice: Endlich-gleiche Flächen.
— Math. und naturw. Berichte aus Ungarn; VIII; p. 170—198.
— Math. Ann. XXXVIII; p. 405.

1893.

609. DOBRINER H. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über endlich-gleiche Flächen.
— Math. Ann. XLII; p. 275—284.

610. id. «Congruentes von Congruentem giebt Gleiches» in seiner Anwendung auf ebene Flächen.
— Math. Ann. XLII; p. 285—296.

611. RÉTHY M. Végszerűen egyenlő területekről.
— Math. és Term. Értesitő: XI; p. 103—114.
Idem Germanice: Über endlich-gleiche Flächen.
— Math. und naturw. Berichte aus Ungarn; XI; p. 66—76.
— Math. Ann. XLII; p. 297—307.

612. RAUSENBERGER O. Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre.
— Math. Ann. XLIII; p. 601—604.

1894.

613. RÉTHY M. A végszerű egyenlőség főtételének bebizonyításához.

— Math. és Term. Értesítő XII, p. 279—280.

Idem Germanice: Zum Beweis des Hauptsatzes über die endlichgleichheit zweier ebener Systeme.

— Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, XII; p. 72—73.

1895.

614. Frattini G. Intorno al postulato dell' equivalenza.
— Periodico di Mat. X; p. 153—154.

615. Gremigni M. Sull' equivalenza dei poligoni piani e sferici. Dimonstrazione d'un assioma d' Euclide.
— Firenze. Bemporad; 19 p.

616. id. Aggiunte e note alla teoria dei poligoni equivalenti.
— Firenze. Bemporad; 8 p.

617. Lazzeri G. Sulla teoria dell' equivalenza geometrica.
— Periodico di Mat. X. 77—93, 133—141.

618. Sforza G. A proposito della nota del prof. Lazzeri sulla teoria dell' equivalenza geometrica.
— Periodico di Mat. X; p. 154—156,

619. Veronese G. Dimonstrazione della proposizione fondamentale dell' equivalenza delle figure.
— Ven. Ist. Atti (7) VI. p. 421—437.
— Periodico di Mat. X. 130—132.

1896.

620. Brunel G. Sur la decomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun.
— Bordeaux, Procès-verbaux 1896—1897, p. 18—21.

621. Mansion P. Résumé de la théorie de l'équivalence, d'après M. L. Gérard.
— Mathesis (2), VII, p. 265—266.

1901.

622. Dehn M. Über den Rauminhalt.
— Mathem. Annalen; LV, p. 465—478.

1902.

623. Vahlen K. Th., Über endlich gleiche Polyeder.
— Math. Ann. LVI, p. 507—508.

PARS ALTERA

SCRIPTA HISTORICA, CRITICA, PHILOSOPHICA.

1856.

1. SARTORIUS von WALTFRSHAUSEN. Gauss zum Gedächtniss.
— Leipzig; 81 p.

1859.

2. HOFFMANN J. Das elfte Axiom der Elemente des Euclides.
— Halle.

1860.

3. DELBOEUF J. Les prolegomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulates.
— Liège, Paris, Leipzig.

1867.

4. FORTI A. Studî geometrici sulla teorica delle parallele di N.J. Lobatchewsky.
— La provincia di Pisa, No. 25.

5. id. Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana. Considerazioni storico-critiche.
— Rivista Bolognese, II.

6. SCHMIDT FR. Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya.
— Archiv. f. Math. u. Phys. XLVIII; p. 217—228.
(Vide translationem sub No. 7.)

7. id. Notice sur la vie et les travaux des deux Mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya.
(Translatio operis sub No. 6. laudati.)
— Bordeaux Mém. V; p. 191—205.

1868.

8. AGOLINI G. Il quinto postulato euclidiano.
— Firenze.

9. FORTI A. Nota intorno alla vita e scritti di Wolfango e Giovanni Bolyai, matematici ungheresi.
— Boncompagni Bull. I; p. 277—299.

10. ENGEL G. Die Idee des Raumes und der Räume.
— Berlin.

1869.

11. JANICHEFSKY. Notice historique sur la vie et les travaux de Lobatchewsky.
— Boncompagni Bull. II; p. 223—262.

1870.

12. BECKER J. C. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie.

— Zürich, 62 p.

13. Helmholtz H. The axioms of geometry.
— The Academy, I p. 128—131.

14. Helmholtz H. Les axiomes de la géométrie.
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 13 laudati.)
— Revue des Cours scientifiques, VII; p. 498—501.

15. Höuel J. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles.
— Nouv. Ann., (2) IX; p.

16. id. Notice sur la vie et les travaux de N. J. Lobatschefsky.
— Bull. Sc. Math., I; p. 66—71; 324—328; 384—388.

17. Kober J. Ueber die Definition des Parallelismus.
— Zeitschr. f. math. Unterr., I; p. 491—493.

18. Lionnet. Sur le postulatum d' Euclide.
— Comptes Rendus, LXX.

19. Massimo. Sugli elementi di geometria di Euclide e gli studî di geometria sulla teoria delle parallele, ed il saggio critico sui principî fondamentali della geometria elementare di Höuel.
— Firenze.

1871.

20. Bonnel J. Sur les définitions géométriques.
— Paris.

21. Lamarle E. Sur la géométrie sans postulats, sur la théorie des parallèles.
— Belgique, Bull., XXXI.

22. Rosanes S. Ueber die neusten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung von Raume.
— Breslau; 20 p.

23. Transon. De l'infini ou métaphysique et géométrie à l'occasion d'une Pseudo-géométrie.
— Evreu.

1872.

24. Becker J. C. Ueber die neusten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume.
— Zeitschr. f. math. Unterr., XVII; p. 314—332.

25. Clifford W. Lecture on «the Postulate of the Science of Space».
— Macmillan's Magazine.

26. Hoffmann J. Die Principien des I-ten Buches von Euklid's Elementen.
— Zeitschr. f. math. Unterr., III; p. 114—143.

27. Kober J. Über das Unendliche und die neuere Geometrie.
— Zeitschr. f. math. Unterr. III.

28. Liard L. Des définitions géométriques et des définitions empiriques.
— Paris.

1873.

29. Hoffmann J. Resultate der nicht-Euklidischen oder Pangeometrie.
— Zeitschr. f. math. Unterr., IV; p. 416—417.

1874.

30. Bonnel J. F. Essai sur les définitions géométriques.
— Paris, 1874—76.

1875.

31. Claudel. La théorie des parallèles, selon les géomètres japonais.
— Bruxelles.

32. Hoüel J. Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes.
— Prague.
(Vide translationem sub No. 40.)

33. Lewes G. H. Imaginary Geometry and the truth of Axioms.
— Problems of Life and Mind, III; London.

34. Schmitz-D. Zeit und Raum in ihren denknotwendigen Bestimmungen, abgeleitet aus dem Satze des Widerspruchs.
— Leipzig; 84 p.

1876.

35. Clifford W. On the space-theory of matter.
— Cambridge, Phil. society's Proc. II; p. 157—158.
— Math. Papers, Nr. V; p. 21—22.

36. Günther S. Ziele und Resultate der neueren math. Histor. Forschung.
— Erlangen; Besold.

37. id. Thibaut's Beweis für das elfte Axiom historisch und kritisch erörtert.
— Ansbach.

38. Helmholtz H. Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.
— Populäre wissenschaftl. Vorträge, III; Braunschweig; p. 21—54.
(Vide translationes sub Num. 39; 49; 56.)

39. id. The Origin and meaning of Geometrical Axioms. I.
(Translatio Anglica operis sub No. 38 laudati.)
— Mind, I; p. 301—321.

40. Hoüel J. Ueber die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften.
(Translatio Germanica operis sub No. 32 laudati.)
— Archiv. d. Math. u. Phys., LIX; p. 65—75.

41. Liebmann O. Zur Analysis der Wirklichkeit.
— Strassburg.

42. Tait P. G. Recent Advances in Physical Science. Introductory.
— London, Macmillan and Co.

43. Tannery P. La géométrie imaginaire et la notion d'espace. I.
— Rev. Phil., II; p. 433—451.

1877.

44. Erdmann B. Die Axiome der Geometrie. Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie.
— Leipzig.

45. Frischauf J. Erwiederung auf Herrn J. Pietzker's Anzeige meiner «Elemente der absoluten Geometrie» in der Jenaer Literaturzeitung mit

Rücksicht auf die Bemerkungen in dieser Zeitschrift, [E].
— Zeitschr. f. math. Unterr., VIII; p. 222—223.

46. Gauss C. F. Litteræ a Gauss ad Bolyai, Bessel, Schumacher datæ.
— Gött. Abhandl., XXVI.

47. Günther S. Zum Repertorium der Mathematik.
— Zeitschrift für math. Unterr., VIII; p. 169.

48. Halsted G. B. The new ideas about space.
— Pop. Sci. Month., XI.

49. Helmholtz H. Les axiomes de la géométrie, leur origine et leur signification.
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 38 laudati.)
— Revue scientif. de la France et de l'Etranger, LI.

50. Land J. P. N. Kant's Space and Modern Mathematics.
— Mind, II.

51. Schmitz-Dumont. Die Bedeutung der Pangeometrie. Mit Bezug auf den Aufsatz: «Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, von Helmholtz, Berlin.» [E].
— Leipzig, Koschny;

52. Tannery P. Dr. Benno Erdmann: «Die Axiome der Geometrie.»
— Rev. Phil., IV; p. 524—530.

53. id. La géométrie imaginaire et la notion d'espace. II.
— Rev. Phil., III; p. 553—575.

1878.

54. Günther S. Zwei neuere Werke über die Principien der Raum und Naturlehre.
— Kosmos; I.

55. Halsted G. B. Bibliography of hyper-space and non Euclidian Geometry.
— Am. Jour., I; p. 262—267; 384—385.

56. Helmholtz H. The origin and meaning of geometrical axioms. II.
(Translatio Anglica operis sub No. 38 laudati.)
— Mind, III; p. 212—225.

57. Krause A. Kant und Helmholtz, über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der Geometrischen Axiome.
— Schauenburg.

58. Land J. P. N. Critical notice of Erdmann's «Die Axiome der Geometrie».
— Mind, III.

59. Tait P. G. Review of Zöllner.
— Nature.

60. Weissenborn H. Ueber die neueren Ansichten von Raum und von den geometrischen Axiomen.
— Vierteljahrsschrift für wissenchaftliche Philosophie II; p. 221—239.

61. Zöllner J. C. F. Zur Metaphysik des Raumes.
— Wissenschaftliche Abhandlungen, II; Leipzig.

1879.

62. Clifford W. Lectures and Essays.
— London.
63. Gilles I. Ueber die Grundsätze der Mathematik.
— Blätter f. das bayrische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer u. A. Kurz, München; p. 145—155
64. Halsted G. B. Addenda to bibliography of hyperspace and Non-Euclidean geometry.
— Am. Jour., II; p. 65—70.

1880.

65. Cristal. Non-Euclidean geometry.
— Edinb. Proc., X; p. 638—622.
66. Gilles J. Bedenkliche Richtungen in der Mathematik.
— Zeitschr. f. math. Unterr., XI; p. 5—24.
67. Gilles J. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Schlegel.
— Zeitschr. f. math. Unterr., XI; p. 278—281.
68. Halsted G. B. Algebras, spaces, logics.
— Pop. Sci. Month., XVII.
69. Schlegel V. Bemerkungen zu einem Aufsatze von Gilles.
— Zeitschr. f. math. Unterr., XI; p. 274—278.

1883.

70. Cayley A. Presidential Address to the British association.
— September 1883, Report Brit. Ass. for adv. of Science.
— Math. Papers, No. 784; t. IX; p. 429—459.
71. Carbonnelle J. Les incertitudes de la Géométrie.
— Revue des questions scientifiques, XIV.
72. Helmholtz H. Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Prof. Land, 1878.
— Wissenschaftl. Abhandl. Bd. II; p. 640—660.
73. Henrici O. On pure Geometry.
— Nature, XXVIII.

1884.

74. Geoghegan E. The axioms of geometry.
— Nature, XXIX; p, 551.
75. Henrici O. The axioms of geometry.
— Nature, XXIX; p. 453—454; 573.
76. Stallo J. B. La matière et la physique moderne.
(Translatio ex lingua Anglica.)
— Paris, Alcan.
77. Szily K. Adatok *Bolyai Farkas* életrajzához.
(Anecdota de vita *Wolfgangi Bolyai*.)
— Értekezések a Math. Tud. köréből. (Commentationes Academiæ Litt. Hungaricæ.) XI. No. IX.

1885.

78. Tait P. G. Properties of Matter. Chapter IV; p. 46—80.
— Edinburgh; Adam and Black.

1886.

79. Clifford W. Il senso comune nelle scienze esatte.
(Translatio ex lingua Anglica.)
— Biblioteca internazionale.

1887.

80. Loria G. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Cap. X; p. 281—301.
— ed. prima: Torino; Clausen.
— ed. secunda: ibid. 1896.

1888.

81. Beez A. Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie.
— Plauen, V. Neupert.

82. Calinon A. Étude sur la sphère, la ligne droite et le plan.
— Berger-Levrault.

83. Liard L. Des définitions géométriques et des définitions empiriques.
— Paris, Alcan.

84. Milhaud. La géométrie Non-Euclidienne et la théorie de la connaissance.
— Rev. Phil., XXV; p. 620—632.

1889.

85. Beltrami E. Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky.
— Lincei, Rendiconti, (4) V; p. 441—448.

86. Bennucci V. La geometria trascendentale e lo spazio metageometrico.
— Carrigliano Calabro.

87. Calinon A. Les espaces géométriques. I.
— Rev. Phil., XXVII; p. 588—595.

88. Koncz J. A maros-vásárhelyi evang. ref. Collegium története.
(Historia Collegii ev. ref. Maros-Vásárhelyiensis.)
— Maros-Vásárhely, p. 271—338.

89. Lechalas G. La géométrie générale.
— Crit. Phil.

90. Rive (de la). Sur la génèse de la notion d'espace.
— Rev. Phil., XXVII; p. 452—462.

91. Tucker R. Mr. Dogson on parallels.
— Nature, XXXIX.

1890.

92. Broglie (L'abbé de). La Géométrie Non-Euclidienne.
— Ann. Phil. Chrét.

93. Duclot S. Los fondamentos de la geometria y el conocimiento del espacio.
— Soc. Argentinea, XXX, XXXI.

94. Halsted G. B. Gauss and the Non-Euclidean Geometry.
— Science, N. S., XII; p. 842—846.

95. id. Our belief in axioms and the new spaces.
— Scientiæ Baccalaureus, I.

96. Kofler J. Die Axiome der Geometrie und die Lehre vom Raume.
— Brixen.

97. Lechalas G. La géométrie générale et l'intuition.
— Ann. Phil. Chrét.
98. id. Les bases expérimentales de la géométrie.
— Rev. Phil., XXX; p. 406—411; 639—641.
99. id. La géométrie générale et les jugements synthétiques à priori.
— Rev. Phil., XXX; p. 157—169.
100. Mansion P. Sur le postulatum et les axiomes d' Euclide.
— Brux, S. sc., XIV; B, p. 35—45.
101. Schotten H. Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. I. Bd.
— Leipzig, Teubner.

1891.

102. Andrade J. Les bases expérimentales de la géométrie euclidienne.
— Rev. Phil., XXXI; p. 430—432.
103. Calinon A. Les espaces géométriques. II.
— Rev. Phil., XXII; p. 368—375.
104. id. Introduction à la géométrie des espaces à trois dimensions.
— Paris, G. Villars.
105. Dixon E. The foundation of geometry.
— Cambridge, Deighton, Bell.and Co.
— Nature, XLIII.
106. Halsted G. B. The appreciation of Non-Euclidean Geometry.
— Science N. S. XIII; p. 462—465.
107. id. Light from Non-Euclidean spaces on the teaching of elementary geometry.
— Scientiæ Baccalaureus, I.
108. Lindemann F. Ueber die Hypothesen der Geometrie.
— Schriften der physik.-ökon. Gesellsch. zu Königsberg. XXXII; p. 20—23.
109. Pietzker F. Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.
— Braunschweig. O. Salle; VII + 110 p.
110. Poincaré H. Géométrie Non-Euclidienne.
— Révue générale des sciences pures et appliquées.
(Vide translationem sub No. 121.)
111. Renouvier. Philosophie de la règle et du compas.
— Crit. Phil.; L'année Phil.
112. Simon M. Ueber das Parallelenaxiom.
— Naturf. Ges. Halle; LXIV; p. 5.
113. id. Zu den Grundlagen der Nicht-Euklidischen Geometrie.
— Programmabhandlung Nr. 512. Lyceum Strassburg; 32 p.
114. Sorel. Sur la géométrie Non-Euclidienne.
— Rev. Phil., XXXI; p. 428—430.
115. Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie.
— Naturf. Ges. Halle; XLIV; p. 8—9.

1892.

116. Clintock Mc. E. On the Non-Euclidean geometry.
— New-York M. S. Bull. II; p. 21—33.

117. Halsted G. B. Fourfold Space and Twofold Time.
— Science, XX.

118. Lie S. Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.
— Leipz. Ber. XLIV; p. 106—115.

119. Mansion P. Sur les recherches de Schering en métagéométrie.
— Brux. S. sc., XVI A; p. 51—53.

120. Pietzker J. Ueber die absolute Geometrie.
— Zeitschr. f. math. Unterr.; XXIII; p. 81—106.

121. Poincaré H. Géométrie Non-Euclidienne.
(Translatio Polonica operis sub No. 110 laudati.)
— Prospectus hebdom.; p. 187—195.

122. id. Non-Euclidean Geometry.
— Nature, XLV.

123. Rouse Ball W. W. Mathematical Recreations and Problems of past and present times.
— London, Macmillan & Co.
(Vide translationem sub No. 213.)

1893.

124. Calinon A. Sur l'indétermination géométrique de l'univers.
— Rev. Phil., XXXVI; p. 595—607.

125. Clintock Mc. E. On the early history of the Non-Euclidian geometry.
— New-York M. S. Bull.; II. p. 144—147.

126. Couturat L. Note sur la géométrie Non-Euclidienne et la rélativité de l'espace.
— Rev. de Metaphys. et de Mor., I.

127. id. L'année philosophique de F. Pillon, 2-e année, 1891.
— Rev. de Métaphys. et de Mor. I; p. 63—85.

128. Delboeuf J. L'ancienne et les nouvelles géométries. I.
— Rev. Phil., XXXVI; p. 449—484.

129. id. Réponse de M. Delbœuf.
— Rev. Phil., XXXVII; p. 78—84.

130. id. Mégamicros, ou les effets sensibles d'une réduction proportionnelle des dimensions de l'Univers.
— Belg. Bull. (3), XXV; p. 667—695.

131. Halsted G. B. The Old and the New geometry.
— Educational Rev.

132. Karagiannides A. Die nicht-euklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart.
— Berlin, Mayer und Müller; 44 p.

133. Lachtin L. K. Vita et opera viri illustrissimi *N. J. Lobatschefskii* (lingua Russica).

— Comment. Societatis Mathematicæ Moscoviensis: XVII; p. 474—494.
134. Lechalas G. Note sur la géométrie Non-Euclidienne et le principe de similitude.
— Revue de Métaphys. et de Mor.; I, p. 199—201.
135. id. M. Delbœuf et «les problèmes des mondes semblables».
— Rev. de Phil., XXXVII; p. 73—78.
136. Mansion P. Sur la portée philosophique de la métagéométrie.
— Brux. S. sc. XVII, A; p. 12—16.
137. id. Analyse de recherches du P. Saccheri S. J.; sur le postulat d'Euclide.
— Brux. S. sc., XVII, A; p. 43—45, 59; B, p. 46—59.
138. id. Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie.
— Paris, Gauthier Villars; 16 p.
139. Ovidio (d') E. Cenno della memoria del Sig. Colonnello de Tilly «Essai de géométrie analytique générale».
— Torino, Atti, XXIX, 1893—94; 65—67.
140. Reyes y Prosper. Nicolas Ivanovich Lobatschefsky.
— Progreso Mat., III; p. 321—324.
141. Rouse Ball, W. W. A short account of the History of Mathematics.
— London, Macmillan and Co.
142. Schotten H. Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. II. Bd. (Cfr. No. 101.)
— Leipzig; G. B. Teubner.
143. Wassiliew A. De Patre Soc. Jesu *Saccherio* (lingua Russica).
— Casan. Relationes, (2), III.
144. id. N. J. Lobatschefsky. Oratio quam A. W. habuit in conventu festivo Universitatis Cæsar. Casanensis d. XXII. m. Octobris anno MDCCCXCIII (lingua Russica). (Vide translationes sub Num. 161, 176.)

1894.

145. Delboeuf J. L'ancienne et les nouvelles géométries; II; III.
— Rev. Phil.: XXVII, p. 353—383; XXXVIII, p. 113—147.
146. Dolbnice J. Anecdota de vita *N. J. Lobatschefskii* (lingua Russica.)
— Petropoli.
147. Halsted G. B. The Non-Euclidean Geometry inevitable.
— The Monist. IV., Chicago; p. 483—493.
148. id. Lambert's Non-Euclidian Geometry.
— New-York M. S. Bull., III; p. 79—80.
149. Klein F. The Evanston colloquium. Lectures on mathematics delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893, before members of the Congress of Math. held in connection with the

World's Fair in Chicago at Northwestern University Evanston, Ill.
— New-York, Macmillan; VII + 109 p.
(Vide translationem sub No. 225.)

150. LECHALAS G. La théorie de la connaissance mathématique.
— Rev. Phil.

151. LITWINOW E. N. J. Lobatschewsky, (lingua Russica).
— Petropoli.

152. LOBATSCHEFSKIJ N. (Liber ad celebranda sollemnia sæcularia *Lobatschefskii* editus ab Universitate Casanensi) (lingua Russica).
— Casani; 210 p.

153. PHILIPPOW M. N. J. Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum.
— Wissenschaftl. Revue No. 15, 19, 22, 24, 25, 27, 28.

154. PLAMENEWSKY I. Vita et opera viri illustrissimi *Lobatschefskii* (lingua Russica).
— Tiflis.

155. REYES Y PRÒSPER. Wolfgang y Juan Bolyai.
— Progreso Mat. IV; p. 37—40.

156. id. Breve reseña historica de la geometria No-Euclidea.
— Progreso Math., IV; p. 13—17.

157. SCHISCHKIN. N. J. Lobatschefsky's Raum.
— Fragen der Philosophie u. Psychologie, XXI; p. 115—135.

158. SSOKOLOW N. P. De quæstionibus *Lobatschefskii* in geometria æstimandis, earumque effectu ad augendas geometriæ notiones (lingua Russica).
— Kijov. Relationes, No 6. p. 1—39.

159. TANNERY P. Théorie de la connaissance mathématique.
— Rev. Phil.

160. VERONESE G. Osservazioni sui principî della geometria.
— Padova, Atti, X; 24 p.

161. VASILIEV A. Nicolái I. Lobachévsky. Address prononced at the commemorative meeting of the imperial university of Kaṣan; October 22, 1893, by A. Vasiliev.
(Translatio Anglica operis sub No. 144 laudati, a *G. B. Halsted* confecta.)
— Austin, Texas; VIII + 40 p.

162. ZINGER N. J. Missverständnisse in den Ansichten über die Grundlagen der Geometrie.
— Fragen d. Philosophie u. Psychologie, XXI; p. 115—135.

1895.

163. BONNEL J. F. Les hypothèses dans la géométrie.
— Paris, G. Villars.

164. CRIVETZ T. Incercare asupra postulatului lui Euclide.
— Bucarest; 24 p.

165. DAUGE F. Sur la géométrie Non-Euclidienne.
— Mathesis; (2); VI; p. 7—13.

166. DELBOEUF J. L'ancienne et les nouvelles géométries. IV.
— Rev. Phil., XXXIX; p. 345—371.

167. ENGEL FR. et STÄCKEL P. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie in Gemeinschaft mit Fr. E. herausgegeben von P. St.
— Leipzig, Teubner; X+325 p.

168. GALDEANO (de) G. Z. Nociones sobre los sistemas geométricas.
— Progreso Math., V; p. 57—67.

169. GALLUCCI G. Geometria non euclidea.
— Il Pitagora, Giornale di Mat., I; p. 12—13, 21—23.

170. GAUSS C. F. Correspondance entre Gauss et Schumacher.
— Paris; Hermann.

171. HADAMARD I. Sur la forme de l'espace.
— Bordeaux, Procès-verbaux, 1895—1896; p. 24—25.

172. ISELY L. La géométrie non-euclidienne.
— Neuchâtel, Bull. Soc. des Sciences Naturelles, XXIV; 1895—96; p. 137—148.

173. MANSION P. Notice sur les recherches de M. de Tilly en métagéométrie.
— Mathésis (2) V; Suppl. III; 12 p.
— Revue des questions scient. XXXII; p. 584—595.

174. NEOVIUS E. R. Om dem Icke-Euclidiska geometrin.
— Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar (Helsingfors), XXXII; p. 222—243.

175. POINCARÉ H. L'espace et la géométrie.
— Rev. de Métaphys. et de Mor., III; p. 631—646.

176. WASSILIEW A. Nikolai J. Lobatschefsky. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der Kaiserlichen Universität Kasan am 22 October 1893. (Translatio Germanica operis sub No. 144 laudati, ab *Engel* confecta.)
— Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI, hist. lit. Abt.; p. 205—244.
— Leipzig; G. B. Teubner.

177. WEHR H. Die Subjectivität des Raumes und das XI. Euklidische Axiom.
— Wien.

1896.

178. BONNEL J. Les hypothèses dans la géométrie; éléments de la théorie atomique.
— Lyon Mém. Acad. (3) III; p. 241—261; 351—364.

179. COUTURAT L. Études sur l'espace et sur le temps des MM. Lechalas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, Weber et Évellin.
— Rev. de Métaphys. et de Mor., IV; p. 646—669.

180. DAUGE F. Cours de Méthodologie mathématique.
— Gand, Hoste.

— Mathésis (2) V; p. 296—272.
181. Del Re A. Sulla struttura geometrica dello spazio in relazione al modo di percepire i fatti naturali.
— Modena, Annuario R. Università 1896—97; p. 15—51.
182. Gallucci G. Geometria non-euclidea.
— Il Pitagora, Giornale di Matematiche, II.
183. Halsted G. B. Darvinism and non-Euclidean Geometry,
— Casan. Relationes. (2) VI; p. 22—25.
184. id. Some salients points in the history of non-euclidean geometry and hyper-spaces.
(Mathematical Papers read at the international Math. congress. Chicago 1893.)
— New-York, Macmillan; p. 92—95.
185. Koenigsberger L. Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik.
— Leipzig; Teubner. V+58 p.
(Vide translationem sub No. 186.)
186. id The investigations of Hermann von Helmholtz on the fundamental principles of mathematics and mechanics.
(Translatio Anglica operis sub No. 185 laudati.)
— Annual report of the board of regents of the Smithsonian institute; p. 93—124.
187. Isely L. La géométrie non-euclidienne.
— Neuchâtel, Bull. Soc. des Sciénces Naturelles, XXV; p. 253—255.
188. id. La géométrie non-euclidienne.
— Archives de sciences phys. et Math.: Genève.
189. Lechalas G. Études sur l'espace et le temps.
— Paris, Alcan.
— Relatio a P. Mansion. conf. Rev. des quest. scientif. (2). IX.
190. id. La courbure et la distance en géométrie générale.
— Rev. de Métaphys. et de Mor., IV; p. 194—202.
191. Mansion P. Sur la géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky.
— Brux. S. sc. XX.
192. Poincaré H. Réponse à quelques critiques.
— Rev. de Métaphys. et de Mor. IV; p. 59—70.
193. Stäckel P. Ein Brief von Gauss an Gerling.
— Gött. Nachr.; p. 40—43.
194. Zeuthen H. G. Geschichte der Mathematik; § 15.
— Kopenhagen. Verlag von Andr. Fied. Höst & Sön.
(Vide translationem sub No. 292.)

1897.

195. Barbarin P. Réfléxions à propos de l'essai de démonstration du postulatum d'Euclide de M. Wickersheimer.

— Journ. de Math. spee., XXII ; p. p. 68—70.

196. BONNEL J. F. Les atomes et les hypothèses dans la géométrie.
— Lyon.

197. id. Les hypothèses dans la géométrie.
— Lyon, Mém. Acad. (3); IV; p. 433—454.

198. CHANDLER C. H. Transcendental space.
— Wisconsin Academie Tran., XI; p. 239—248.

199. DELBOEUF J. La géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide.
— Liège. Mém. Société R. des sciences; (2); XIX; 117 p.

200. DUPORT H. Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.
— Bull. S. M. F. XXVII; p. 138—241.

201. MACAULAY F. S. John Bolyai's science absolute of space.
— Mathematical Gazette, p. 25—31; p. 50—60.

202. MANSION P. Quelques documents récents sur les premières récherches de Lobatschefsky, J. Bolyai et Gauss en Géométrie non-euclidienne.
— Brux. S. sc. XXII; p. 44—45.

203. NEWCOMB S. The philosophy of hyper-space.
— Bull. of. American Math. Society, (2); IV; p. 187—195.

204. NOWIKOW P. M. De geometria *Lobatschefskii* cogitationibusque ad eam a *W. J. Zinger* et *P. A. Nekrassow* prolatis (lingua Russica).
— Petropoli, Relatio Musei Pædagogici; 225 p. 1897—98.

205. REINHARDT N. De geometria non-euclidea ac positivismo (lingua Russica.)
— Casani, 56 p.

206. RUSSEL A. W. An essay on the foundations of Geometry.
— Cambridge, University presse; XVI+201 p.
(Vide translationem sub No. 283.)

207. SCHMIDT F. Mitteilungen über Johann Bolyai.
— Deutsche Math. Ver., IV; p. 107—109.

208. STÄCKEL P. et ENGEL FR. Gauss, die beiden Bolyai und die nicht-euklidische Geometrie.
— Math. Ann. IL; p. 149—206.
(Vide translationem sub No. 209.)

209. id. Gauss, le deux Bolyai et la géométrie non euclidienne.
(Translatio partis prioris operis sub No. 208 laud. a *Laugel* confecta.)
— Bull. Sc. Math.; p. 149—167.

210. STÄCKEL P. Mitteilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai.
— Gött. Nachr.; p. 1—12.

211. STORY W. E. Hyperspace and non-euclidean Geometry.
— Math. Review, I; p. 169—184.

212. WASSILJEW A. Lobatschefskij's Ansich-

ten über die Theorie der Parallellinien vor dem Jahre 1826.
— Deutsche Math. Ver., IV; p. 88—90.

1898.

213. BALL ROUSE W. W. Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes.
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 123 laudati.)
— Paris, Hermann; Chap. X. p. 288—302; Chap. XII, p. 321—346.

214. BEEZ R. Ueber euklidische und nichteuklidische Geometrie.
— Plauen; V. Neupert.

215. BEDŐHÁZY J. A két Bolyai.
(Vitæ Wolfgangi et Joannis Bolyai.)
— Maros-Vásárhely, Budapest, 454 p.

216. BONNEL J. Les hypothèses dans la géométrie.
— Lyon, Mém. Acad., (3) V; p 401—4.9.

217. BURALI-FORTI. Les postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.
— Verhandlungen des ersten internationalen Math. Kongresses in Zürich; p. 274—250.
— Leipzig, Teubner.

218. BRASSAI S. A XI. axioma. (Axioma XI.)
— Akadémiai Értesítő. (Relationes academicæ), Budapest.

219. CANTOR M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.
III Bd. 103 Kap.
— Leipzig. G. B. Teubner.

220. COUTURAT L. Étude critique «Essai sur les fondements de la Géométrie, par B. Roussel.»
— Rev. de Metaphys. et de mor.; p. 354—380.

221. DUPUIS N. F. On transcendental geometry.
— Canada, Proc. and Trans. R. Soc., (2), III; p. 3—16.

222. GALDEANO (de) Z. L'unification des concepts dans les mathématiques.
— Verhandlungen des ersten internationalen Math. Kongresses in Zürich; p. 227—231.
— Leipzig, Teubner.

223. HADAMARD J. Leçons de Géométrie élémentaire.
T. I; Note B. Sur le postulatum d'Euclide; p. 278—286.
— Paris, A. Colin.

224. KLEIN F. Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie.
— Casan. Relat. (2), VIII; p. 1—27.
— Math. Ann., L, p. 583—600.

225. KLEIN F. Conférences sur les Mathématiques, faites au Congrès de Math. tenue à l'occasion de l'exposition de Chicago (1893).
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 149 laudati, a *Laugel* confecta.)

— Paris, Hermann, 125 p.

226. Laisant C. A. La Mathématique. Philosophie, Enseignement. Chap. VI, La Géométrie, p. 89—106.
— Paris, Carré et Naud.

227. Lechalas G. L'axiome de la libre mobilité d'après M. Russel.
— Rev. de Métaphys. et de Mor.; p. 746—758.

228. Poincaré H. On the foundations of Geometry.
— The Monist. IX; p. 1—43.

229. Russel A.W. Les axiomes propres a Euclide sont-ils empiriques?
— Rev. de Métaphys. et de Mor.; p. 759—776.

230. Suták J. Geometriai axiomák. (Axiomata geometriæ).
— Bölcseleti folyóirat. (Diarium philosophicum). (Budapest) 32 p.

231. Tchelpanoff C. Index librorum, qui ad quæstionem de spatii notione pertinent (lingua Russica).
— Kijov. Relationes; p. 1—14.

232. Villareal F. Geometria imaginarias ó no-Euclidianas.
— Ann. de la Sociedad Cientifica Argentina, XLVI; p. 23—32; 67—92; 128—148.

1899.

233. Andrade J. L'enseignement de la géométrie et les géométries non-euclidiennes.
— Enseignement Math., I; p. 114—126.

234. Bonnel I. Les axiomes et les hypothèses dans la géométrie.
— Paris, Hermann.

235. Bonola R. Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea.
— Bollettino di Bibliografia e storia delle Scienze Mat., II; p. 1—10, 33—40; 81—88.

236. Duport. Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.
— S. M. F. Bull., XXVII; p. 138—141.

237. Engel F. Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie herausgegeben von F. E. und P. St. Mit vielen Figuren im Texte, in 2 Bänden.
I. Nicolaj Iwanowitsch Lobatchefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, herausgegeben von Friedrich Engel mit einem Bilde Lobatchefskij's.
— Leipzig, G. B. Teubner; XVI+476 p.

238. Fontené G. Sur l'hypothèse Euclidienne.
— Rev. de Métaphys. et de Mor., p. 183—188.

239. Galdeano Z. G. La moderna organizacion de la matematica.
— Progreso Mat. (2), I; p. 17—24, 45—51, 77—87, 110—115, 154—156, 182—190.

240. Halsted G. B. Scientific Books, «Urkunden zur Geschichte . . .»

— Science N. S. IX; p. 813—817.

241. id. Report on progress in non-euclidean Geometry.
— Proc. of the American Ass. for the adv. of science. XLVIII; p. 53—68.
— American Math. Montly VI; p. 219—233.

242. Lagrange Ch. Pour la géométrie euclidienne.
— Belgique, Bull. (3), XXXII; p. 506—521.

243. Mansion P. Ueber eine Stelle bei Gauss, welche sich auf nicht-euklidische Metrik bezieht.
— Deutsche Math. Ver., VII; p. 156—158.

244. Poincaré H. Des fondements de la géométrie; à propos d'un livre de M. Russel.
— Rev. de Métaphys. et de Mor.; p. 251—279.

245. Russel A. W. Sur les axiomes de la géométrie.
— Rev. de Métaphys. et de Mor; p. 684—707.

246. Schmidt F. et Stäckel P. Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai.
— Leipzig, Teubner; XII+208 p.

247. Schultz J. Psychologie der Axiome.
— Göttingen. Vandenhœck u. Ruprecht; IV+232 p.

248. Stäckel P. Franz Adolph Taurinus. Ein Beitrag zur Vorgeschichte der nicht-euklidischen Geometrie.
— Abh. zur Geschichte der Math.; p. 397—427.

249. id. A képzetes számok elmélete Bolyai János hátrahagyott irataiban.
— Mathem. és Term. tud. Értesítő. XVII.
Idem Germanice: Johann Bolyais Theorie der imaginären Grössen.
— Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd XVI p. 263—297.

1900.

250. Andrade J. Euclidien et non-euclidien.
— Enseignement Math., II; p. 298—300.

251. Bonola R. Bibliografia sui fondamenti della geometria, in relazione alla geometria non-euclidea.
— Bollettino di Bibliografia e storia delle Scienze Mat., III; p. 2—3; 31—41; 70—73.

252. id. Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee.
Articolo VI delle «Questioni riguardanti la geometria elementare.»
— Bologna, Zanichelli; p. 143—222.

253. Calinon A. Sur la géométrie numerique.
— Rev. Phil., IL; p. 614—620.

254. Enriques F. Osservazioni critiche e didattiche sulle questioni che interessano i postulati della geometria. Articolo I delle «Questioni riguardanti la geometria elementare.»
— Bologna, Zanichelli, p. 1—31.

255. Gauss C. F. Grundlagen der Geometrie.
— Gauss Werke; t. VIII; p. 159—268.
256. Halsted G. B. Non-euclidean geometry.
— American Math. Montly. VII; p. 123—133.
257. id. Gauss and the non-euclidean geometry.
— Science N. S.; XII; p. 842—846.
258. id. Non-euclidean geometry of teachers.
— Popular astronomy.; 14 p.
259. Hölder O. Anschauung und Denken in der Geometrie.
— Leipzig, Teubner; 75 p.
260. Janssen van Raay W. H. Opinions de quelques géomètres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne.
— Casan. Relat., (2), X; p. 1—14.
261. Mansion P. Sur le postulatum d'Euclide.
— Enseignement Math. II; 457 p.
262. id. Mémoires de géométrie générale analytique; par M. Barbarin; Rapport de P. Mansion.
— Belgique, Bull.; p. 28—42.
263. Pascal E. Repertorio di matematiche superiori.
T, II. Cap. XX, XXI; p. 844—892.
— Milano, Hœpli.
(Vide translationem sub No. 288.)
264. Pieri M. Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique.
— Bibliothéque du Congrès international de Phil. III. Logique et Histoire de sciences, p. 367—404.
265. Poincaré H. Sur les principes de la géométrie. Replique à Russel.
— Rev. de Métaphys. et de Mor.; VIII, p. 76—86.
266. Sorel G. Le système des mathématiques.
— Rev. de Métaphys. et de Mor.; p. 407—428.
267. Stäckel P. Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie.
— Math. Ann. LIV; p. 49—85.
268. id. Eine Zeitungsnotiz über Gauss' Stellung zur Parallelen-Lehre.
— Bibliotheca Math. (3); I; p. 275.
269. Tikhomandritzky M. Sur le postulatum d'Euclide.
— Enseignement Math., II; 385—388.
270. Wassiliew A. De spatio motuque (lingua Russica).
— Moscoviæ, Annales physico-mathem. p. 1—13.

1901.

271. Alasia C. Poligeometrognomia generale e la geometria non-euclidea del Chrystal.
— Trapani, Rivista di scienze e lettere, I; no. 5—6, p. 20—23; no. 7—8, p. 19—21.

272. Barbarin P. Sur la géométrie des êtres plans.
— Bordeaux. Procés Verbaux.

273. Cyon (de) E. Les bases naturelles de la géométrie d' Euclide.
— Rev. Phil., LII; p. 1—30.

274. Couturat L. Sur les bases naturelles de la géométrie d' Euclide.
— Rev. Phil., LII; p. 540—542.

275. Crawley E. S. Geometry: Ancient and Modern.
— Popular Science Montly; p. 257—266.

276. Enriques F. Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria.
— Rivista Filosofica; V. IV; p. 171—195.

277. Faggi A. Attraverso la geometria.
— Rivista Filosofica; T, IV; p. 3—28.

278. Halsted G. B. Supplementary report on non-euclidean geometry.
— Science, N. S. XIV; p. 705—717.

279. id. The appreciation of non-euclidean geometry.
— Science, N. S. XIII; p. 462—465.

280. Lechalas G. Les bases naturelles de la géométrie d' Euclide.
— Rev. Phil.; LII; p. 340.

281. Loria G. Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche, § IX, X, p. 412—423.
— Bibliotheca Mathematica II; p. 392—440.

282. Mansion P. Sur la géométrie non-euclidienne chez Gauss.
— Brux. S. sc. XXV; p. 99—102.

283. Russel A. W. Essai sur les fondements de la géométrie.
(Translatio Franco Gallica operis sub No. 206 laud., a *Cadenat* conf.)
— Paris, Gauthier-Villars; p. X+274.

284. Stäckel P. A nem-euklidicus geometria története Bolyai János hátrahagyott irataiban.
— Mathem. és Term. Értesítő, XVIII.
Idem Germanice: Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie durch Johann Bolyai.
— Math. u. naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn, XVII. p. 1—19.

1902.

285. Alasia C. Poligeometrognomia generale e la Geometria non-euclidea del Chrystal.
— Trapani, Rivista di Scienze e Lettere; II.

286. Bonola R. Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria non-euclidea.
— Bollettino di Bibliografia e storia delle Scienze Mat., V; p. 32—41.

287. Pietzker Fr. Considérations sur la nature de l' espace.
— L' Enseignement Math., IV; p. 75—110.

288. Pascal E. Repertorium der höheren Mathematik. Bd, II. Geometrie.
— Leipzig, Teubner. IX+712 p.
(Translatio Germanica operis sub No. 263 laud., a *Schepp* conf.)

289. POINCARÉ H. Les fondements de la géométrie. Grundlagen der Geometrie par M. Hilbert.
— Journ. des Savants; p. 252—271.

290. STÄCKEL P. Franz Schmidt.
— Deutsch. Math. Ver.; XI; p. 141—146.

291. STÄCKEL P. et KÜRSCHÁK J. *Bolyai János* észrevételei *Lobatschefskij Miklós*nak a parallelákra vonatkozó vizsgálataira.
— Mathem. és Term. Értesítő, XX. p. 40—67.
Idem Germanice: *Johann Bolyai*'s: «Bemerkungen über *Nicolaus Lobatschefskij*'s: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.»
— Math. und naturw. Berichte aus Ungarn XVIII. p. 250—279.

292. ZEUTHEN H. S. Histoire des Mathématiques. Chap. XV.
(Translatio Franco-Gallica operis sub No. 194 laudati, a *Mascart* confecta.)
— Paris, G.-Villars; p. 107—114.

INDEX AUCTORUM LITTERARUM ORDINE DIGESTUS.*

* Confectus ab A. Roth, mathesis studioso.

N. B. Numeri Romani, qui auctoris nomine appositi sunt, denotant partes [priorem aut alteram], numeri autem Arabici, numeros ordinales, in quibus libri, ab auctore editi, descripti sunt.

ERRATA.

Pag. 13, v. 9 pro superficiei lege superficie.
« 28, v. 3 pro coniunctorum lege coniunctarum.
« 34, v. 3 a calce pro reliquuntur lege relinquuntur.
« 35, v. ult. pro hæc lege hoc.
« 36, v. 10 pro cyclos lege cyclis.
« 38, v. 6 a calce pro quod lege quæ.
« 39, v. 13 pro RIEMANNianum lege RIEMANNianam.
« 47, v. 7 pro quæ lege quas.
« 48, v. 7 a calce pro dici lege dicere.
« 55, v. 15 pro ipsum lege ipsam.
« 55, v. ult. pro axis lege axes.
« 56, v. 14 pro affectum lege affectam.

Math 5859.02.5
Libellus post saeculum quam Ioannes
Cabot Science 003343599
3 2044 091 916 478